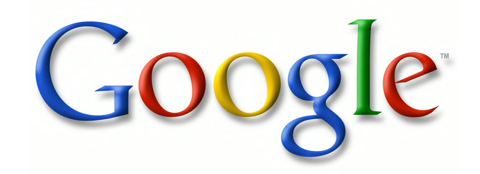
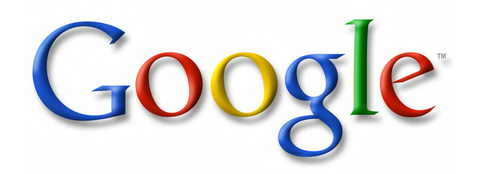
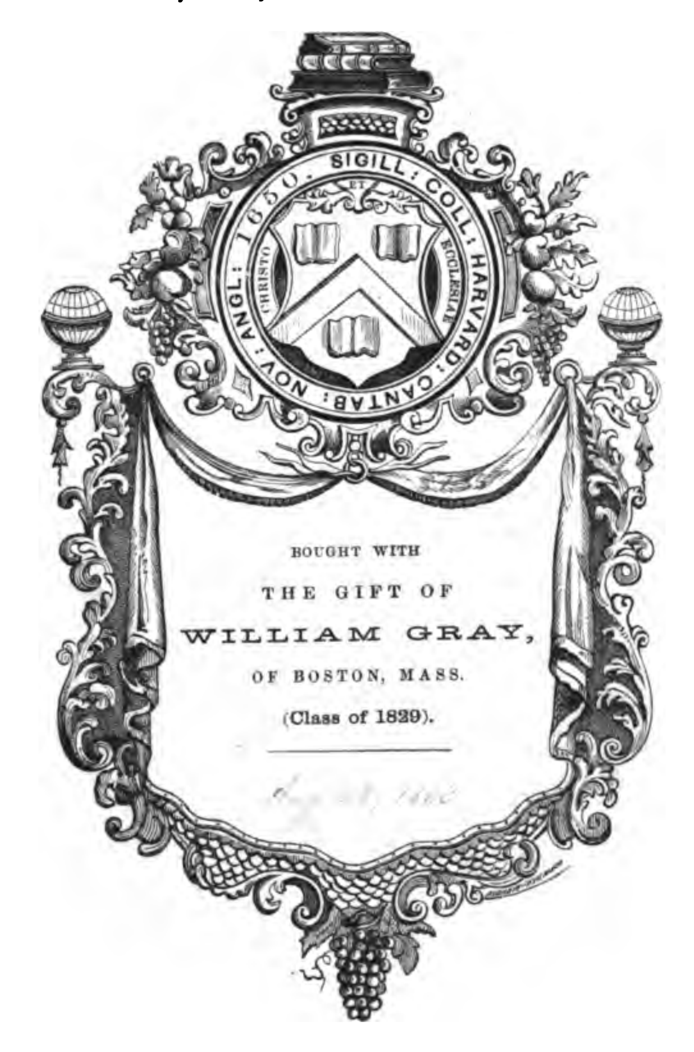





SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE GIFT OF
WILLIAM GRAY,
OF BOSTON, MASS.
(Class of 1829).









THEORIE UND ANWENDUNG

DER

DETERMINANTEN.

MIT BEZIEHUNG AUF DIE ORIGINALQUELLEN

DARGESTELLT

VON

DR. RICHARD BALTZER,
OBERLEHRER AM STÄDTISCHEN GYMNASIUM ZU DRESDEN.

LEIPZIG,
VERLAG VON S. HIRZEL.
1857.

Vorrede.

Das mächtige Instrument der Algebra und Analysis, welches unter dem Namen der Determinanten in Gebrauch gekommen ist, war aus den bis vor wenig Jahren vorhandenen Quellen nicht leicht kennen zu lernen. Die grossen Meister hatten jenes Hülfsmittel für die höheren Zwecke, denen ihr Genius diente, sich geschaffen und waren wenig gesonnen, ihren Bau durch Betrachtungen über Material und Werkzeug, von deren Tüchtigkeit sie tiefe Ueberzeugung hatten, aufzuhalten. Daher ist es mit den Determinanten wie wohl mit allen wichtigen Instrumenten der Mathematik ergangen, dass sie längere Zeit im Besitz von wenig Auserwählten blieben, bevor eine geordnete Theorie derselben den Nichtkennern das Verständniss und den Gebrauch zugänglicher machte. Die erste Idee, der Algebra durch Bildung combinatorischer Aggregate, die heute Determinanten genannt werden, zu Hülfe zu kommen, rührt, wie Herr Professor Dirichlet bemerkt hat, von Leibniz her. Ausser dem Briefe an L'Hospital 1693 April 28, worin Leibniz die Ueberzeugung von der Fruchtbarkeit seines Gedankens ausspricht, scheint aber nichts übrig zu sein, woraus sich schliessen liesse, dass Leibniz sich um weitere Früchte dieser Idee bemüht habe. Die zweite Erfindung der Determinanten durch Cramer 1750 blieb unverloren wegen der Dienste, die der Algebra daraus erwuchsen theils durch Cramer selbst, theils nach einer Reihe von Jahren durch Bézout, Laplace, Vandermonde, Lagrange. Namentlich war es Vandermonde (sur l'élimination 1772), der einen Algorithmus der Determinanten zu begründen suchte, während Lagrange in der classischen Abhandlung sur les pyramides 1773 von den Determinanten dritten Grades bei Problemen der analytischen Geometrie bereits in grosser Ausdehnung Gebrauch machte. Den wichtigsten Anstoss jedoch zur weiteren Ausbildung der Rechnung mit Determinanten haben Gauss' Disquisitiones arithmeticae 1801 gegeben. Ausgehend von der Betrachtung der Algorithmen, welche in diesem Werke sich auf die »Determinanten der quadratischen Formen« beziehen, stellten Binet und Cauchy 1812 die allgemeinen Regeln für die Multiplication der Determinanten auf, wodurch Rechnungen mit schwer zu bewältigenden Aggregaten eine unerwartete Leichtigkeit gewannen. Des neuen Calcüls, welchen besonders Cauchy weiter ausgebildet hatte, bemächtigte sich mit schöpferischer Kraft vorzüglich Jacobi 1826, dessen in Crelle's Journal niedergelegte Arbeiten reichlich Zeugniss geben, was das neue Instrument in des Meisters Hand zu leisten vermochte. Erst durch Jacobi's Abhandlungen »de formatione et proprietatibus determinantium und de determinantibus functionalibus 1841« wurden die Determinanten Gemeingut der Mathema-

tiker, welches seitdem von verschiedenen Seiten her wesentliche Vermehrungen erhalten hat.

Jacobi's Abhandlung de formatione etc., welche nicht unmittelbar für das erste Studium des Gegenstandes verfasst ist, und Spottiswoode elementary theorems relating to determinants, London 1851, eine Schrift, welche bei zweckmässiger Anordnung des Stoffes und einer guten Auswahl von Beispielen manche Ungenauigkeiten und selbst Unrichtigkeiten enthält, wodurch ihrem Werthe Eintrag geschieht, waren die einzigen vorhandenen Anleitungen zur Kenntniss der Determinanten, als ich mich entschloss, das zum grossen Theil noch zerstreute Material in eine Theorie der Determinanten, begleitet von den wichtigsten Anwendungen derselben, zusammenzustellen. Meine Arbeit war fast zum Abschluss gebracht, als mir Brioschi la teorica dei determinanti, Pavia 1854, bekannt wurde. Dieses Werk, hervorgerufen durch das auf vielen Seiten gefühlte Bedürfniss einer elementaren Anleitung zur Kenntniss der Determinanten, ist, wenn auch in den Elementen nicht immer streng, doch mit vorzüglicher Sachkenntniss geschrieben und enthält einen reichen Schatz trefflichen Materials, wodurch es schnell in weiten Kreisen Eingang und Anerkennung sich verschafft hat. Die jüngst in Berlin erschienene deutsche Uebersetzung dieses werthvollen Buches ist ohne Zweifel den deutschen Mathematikern sehr willkommen. Dass ich den Muth hatte, meine Schrift über denselben Gegenstand zu vollenden, gründet sich hauptsächlich auf die Verschiedenheit in der Anlage und Ausführung meiner Arbeit. Um den theoretischen Kern des Gegenstandes möglichst rein herauszuschälen, habe ich die Haupteigenschaften der Determinanten und die darauf gegründeten Algorithmen in synthetisch genau articulirtem Vortrag, wie er den Lehrbüchern von Alters her eignet, abgehandelt und wo es nöthig schien, durch einfache Beispiele erläutert. Es kann zur klaren Einsicht in die Lehrsätze eines Systems nur erwünscht sein, bei jedem Lehrsatze die Summe der Prämissen, auf denen er beruht, immer gegenwärtig zu sehen. Dagegen habe ich die Anwendungen auf Algebra, Analysis und Geometrie in einen besondern Abschnitt vereinigt, um durch grösseren Zusammenhang leichtere Auffassung und in den einzelnen Materien eine gewisse Vollständigkeit erreichen zu können. Ueberall aber habe ich mit unablässigem Bemühen den Lehrsätzen und Beweisen möglichste Präcision zu verleihen gesucht, wo sie derselben noch zu entbehren schienen. Bei Annahme von Bezeichnungen und Benennungen in diesem Gebiete glaubte ich ängstliche Vorsicht anwenden zu müssen, weil die neuere Mathematik ohnediess von manchen Ausschweifungen zügelloser Terminologie mit Sprachverwirrung bedroht wird. Besonders aber wünschte ich meiner Arbeit dadurch einigen Werth zu verleihen, dass ich soviel als möglich bis zu den Originalquellen vorzudringen suchte, um die ersten Erfinder von Methoden und die ersten Entdecker von Lehrsätzen citiren zu können. Solche Citate sind nicht nur ein Opfer, welches die spätere Zeit den frühern Offenbarungen des Genius schuldet, sie bilden ein Stück Geschichte der Wissenschaft und laden zum Studium der hohen Werke ein, aus denen die Wissenschaft aufgebaut ist, und in denen noch immer reiche Schätze ungehoben ruhen. Freilich kann ich nicht erwarten, dass mein Suchen hierbei überall zum Finden des Richtigen geführt hat; ich hoffe aber, dass verlautete Irrthümer zu gelegentlicher Aussprache des Richtigen Veranlassung geben werden.

Nach dem Vorbemerkten ist es unnöthig hervorzuheben, was etwa von meiner Seite eigenes dem vorgefundenen Material hinzugefügt worden ist. Es bleibt mir nur übrig, die Güte meines gelehrten Freundes Borchardt dankbar zu rühmen, der durch mancherlei Anweisung mich bei meiner Arbeit wirksam unterstützt hat.

Inhalt.

Theorie der Determinanten.

Anwendungen der Determinanten.

Erster Abschnitt.

Theorie der Determinanten.

---

§. 1. Eintheilung der Permutationen gegebener Elemente in zwei Classen.

1. Die Elemente einer Complexion, aus welcher Permutationen abgeleitet werden sollen, werden durch Ordnungszahlen unterschieden. Ein Element heisst h ö h e r als ein anderes, wenn es die grössere Ordnungszahl hat. Die Combination eines Elements einer Permutation mit einem der folgenden Elemente heisst in Beziehung auf die ursprüngliche Complexion ein D e r a n g e m e n t*), wenn das erste Element der Combination höher ist als das zweite, z. B. die Permutation $a_2 a_4 a_3 a_1$ enthält 4 Derangements: $a_2 a_1$, $a_4 a_3$, $a_4 a_1$, $a_3 a_1$.

Die Permutationen gegebener Elemente sind von Cramer in zwei Classen getheilt worden, deren erste die Permutationen umfasst, in welchen eine g e r a d e Anzahl von Derangements vorhanden ist, deren zweite die Permutationen mit u n g e r a d e r Anzahl von Derangements enthält.

2. **Lehrsatz.** W e n n i n e i n e r P e r m u t a t i o n e i n E l e m e n t m i t e i n e m a n d e r n v e r t a u s c h t w i r d, w ä h r e n d d i e ü b r i g e n E l e m e n t e i h r e P l ä t z e b e h a l t e n, s o ä n d e r t s i c h d i e A n z a h l d e r v o r h a n d e n e n D e r a n g e m e n t s u m e i n e u n g e r a d e Z a h l**).

Beweis. Sind g und h die zu vertauschenden Elemente, h das höhere derselben, A die Gruppe der Elemente, welche g vorangehen, B die Gruppe der

---

*) Cramer Analyse des lignes courbes, 1750. Appendix p. 658.

**) Die auf diesen Satz sich zu gründende Unterscheidung der Permutationen rührt von Bézout her (Hist. de l'acad. de Paris 1764 p. 292) und wurde zuerst begründet von Laplace in derselben Sammlung 1772, II p. 294, einfacher in der hier mitgetheilten Weise von Mollweide demonstratio eliminationis Cramerianae. Leipzig 1811. §. 9 und von Gergonne Ann. de Math. 4 p. 150.

Elemente, welche zwischen g und h stehen, C die Gruppe der Elemente, welche h nachfolgen; ist also die gegebene Permutation

$$A\,g\,B\,h\,C,$$

und die zu bildende

$$A\,h\,B\,g\,C,$$

so rührt die gesuchte Aenderung der Anzahl der vorhandenen Derangements von der Stellung her, welche g und h gegen einander und gegen die in B enthaltenen Elemente einnehmen.

Die Gruppe B enthalte β Elemente, von denen β_1 höher als g, β_2 höher als h seien. Dann sind in der Complexion gBh ausser den in B vorhandenen Derangements deren $\beta-\beta_1+\beta_2$ anzutreffen, weil g höher ist als $\beta-\beta_1$ Elemente von B, und β_2 Elemente von B höher sind als h. Anstatt dieser Derangements kommen in der Complexion hBg, welche durch Vertauschung von g und h abgeleitet ist, $\beta-\beta_2+1+\beta_1$ Derangements vor, weil h höher ist als $\beta-\beta_2$ Elemente von B, ferner h höher als g, und endlich noch β_1 Elemente von B höher sind als g. Die Differenz dieser Anzahlen

$$\beta-\beta_2+1+\beta_1-(\beta-\beta_1+\beta_2)=2\beta_1-2\beta_2+1$$

ist ungerade, w. z. b. w.

3. Durch Vertauschung von jedesmal 2 Elementen können nach und nach alle Permutationen einer gegebenen Complexion dargestellt werden. Die in dieser Reihe der Permutationen anzutreffenden Derangements sind abwechselnd von gerader und ungerader Anzahl (2). Da die Anzahl aller Permutationen gerade ist, so giebt es ebensoviel Permutationen der ersten Classe, in denen eine gerade Anzahl Derangements vorhanden ist, als Permutationen der zweiten Classe, welche eine ungerade Anzahl Derangements enthalten. Jene lassen sich durch eine gerade, diese durch eine ungerade Anzahl Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen aus der gegebenen Complexion ableiten.

Zwei Permutationen gehören in dieselbe Classe, wenn eine aus der andern oder beide aus einer dritten durch eine gerade Anzahl Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen sich ableiten lassen.

4. **Analytischer Beweis des Lehrsatzes** (2). Zur Unterscheidung der Permutationen bilde man bei jeder derselben die Differenzen der den Elementen zugehörigen Ordnungszahlen, indem man die Ordnungszahl jedes Elements von der jedes folgenden Elements subtrahirt. Eine Permutation enthält soviel Derangements, als unter den erwähnten Differenzen negative vorkommen (1).

Das Product dieser Differenzen ist eine alternirende Function der Ordnungszahlen*), welche durch Vertauschung von 2 Ordnungszahlen den entgegengesetzten Werth erhält.

Beweis**). Die einzelnen Differenzen behalten bei der Vertauschung von zwei Ordnungszahlen ihre absoluten Werthe, also behält auch ihr Product seinen

*) Fonction alternée nach Cauchy J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 30, Analyse algébr. III, 2. — Functio alternans nach Jacobi Crelle J. 22 p. 360.

**) Jacobi Det. 2 (Crelle J. 22 no. 11).

absoluten Werth. Versteht man unter i und k zwei bestimmte, unter r und s zwei beliebige andere Ordnungszahlen; unter

$$\Pi(r-i)(r-k),\ \Pi(r-s)$$

die Producte der Factoren, deren allgemeine Formeln

$$(r-i)(r-k),\ r-s$$

sind; bezeichnet man endlich einen der Werthe 1 oder -1 durch ε, so kann das Product der bei einer gegebenen Permutation zu bildenden Differenzen durch

$$\varepsilon(k-i)\Pi(r-i)(r-k)\Pi(r-s)$$

dargestellt werden. Wird nun i mit k vertauscht, so bleiben

$$\Pi(r-i)(r-k) \text{ und } \Pi(r-s)$$

unverändert, und $k-i$ erhält den entgegengesetzten Werth. Also bekommt das Product den entgegengesetzten Werth, w. z. b. w.

Da durch Vertauschung von 2 Elementen der Permutation das in Betracht gezogene Product einen Zeichenwechsel erleidet, so ändert sich zugleich die Anzahl der negativen Differenzen, mithin die Anzahl der vorhandenen Derangements um eine ungerade Zahl, wie oben bewiesen worden.

5. Die Vertauschung der Elemente einer Complexion heisst cyclisch, wenn jedes Element durch das folgende, das letzte Element durch das erste ersetzt wird.

Durch eine cyclische Vertauschung aller Elemente erhält man aus einer gegebenen Permutation eine Permutation derselben oder nicht derselben Classe, je nachdem die Anzahl der Elemente ungerade oder gerade ist. Denn die cyclische Vertauschung von n Elementen lässt sich durch Vertauschung des ersten Elements mit dem zweiten, dritten u. s. f., also durch $n-1$ Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen erreichen.

Aus einer gegebenen Permutation kann jede andere durch cyclische Vertauschung einzelner Gruppen von Elementen abgeleitet werden. Sind z. B.

7 2 5 4 3 8 1 6 9

die Ordnungszahlen der Elemente in der gegebenen Permutation, und

2 9 3 8 7 4 1 5 6

die Ordnungszahlen der Elemente in der abzuleitenden Permutation, so beginne man mit dem ersten umzustellenden Element der gegebenen Permutation und ersetze der Reihe nach 7 durch 2, 2 durch 9, 9 durch 6, 6 durch 5, 5 durch 3, endlich 3 durch das Anfangs ausgestossene Element 7. Dadurch ist eine Gruppe von Elementen abgeschlossen und deren cyclische Vertauschung vollendet. Hierauf ersetze man aus der Reihe der noch übrigen Elemente 4 durch 8, 8 durch 4, womit die cyclische Vertauschung einer zweiten Gruppe von Elementen sich schliesst. Das noch übrige Element 1 ist durch ein anderes nicht zu ersetzen. Demnach ist durch partielle cyclische Vertauschungen aus der ersten Permutation die zweite abgeleitet.

Wenn man jedes der Elemente, welches bei der eben beschriebenen Ableitung einer Permutation aus einer andern durch sich selbst zu ersetzen ist, als eine besondere Gruppe mitzählt, so gilt die Regel:

„Zwei Permutationen gehören in dieselbe Classe oder nicht, je nachdem die Differenz der Anzahl ihrer Elemente und der Anzahl der Gruppen, durch deren cyclische Vertauschung die eine Permutation aus der andern abgeleitet werden kann, gerade oder ungerade ist*). Bestehen nämlich die gegebenen Permutationen aus n Elementen, lässt sich aus der ersten die zweite dadurch ableiten, dass man die Elemente in p Gruppen von α_1, α_2, α_3, .. Elementen vertheilt, und die einzelnen Gruppen durch cyclische Vertauschung umbildet, so können die vorzunehmenden cyclischen Vertauschungen durch

$$(\alpha_1-1)+(\alpha_2-1)+(\alpha_3-1)+\ldots$$

Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen bewirkt werden. Nun ist

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots=n,$$

also kann die zweite Permutation aus der ersten durch $n-p$ Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen abgeleitet werden.

Um die Elemente der ersten Gruppe an ihre neuen Plätze zu bringen, sind nicht weniger als α_1-1 Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen erforderlich u. s. f., daher kann eine der gegebenen Permutationen aus der andern nicht durch weniger als $n-p$ Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen abgeleitet werden. Im obigen Beispiel ist $p=3$, $n-p=6$, folglich gehören die gegebenen Permutationen derselben Classe an.

§. 2. Determinante eines Systems von n^2 Elementen.

1. Wenn m Horizontalreihen (lignes) von je n Elementen, oder von der andern Seite betrachtet n Verticalreihen (colonnes) von je m Elementen zu unterscheiden sind, so werden die Elemente im Allgemeinen zweckmässig durch 2 Suffixe (Ordnungszahlen, Zeiger, indices) bezeichnet, deren erstes die Stelle der Reihe, deren zweites die Stelle des Elements in der Reihe angiebt**), z. B.

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{matrix}\ .$$

Statt $a_{i,k}$ schreibt man auch $a_i^{(k)}$ oder bloss (i,k). Wenn $m=n$, so heisst die Reihe der Elemente vom ersten zum letzten

$$a_{1,1}\ a_{2,2}\ \cdots\ a_{n,n}$$

die Diagonalreihe des Quadrats der Elemente.

---

*) Cauchy J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 42. Anal. algébr. Note 4. Jacobi Det. 8.

**) Diese Bezeichnung ist zuerst von Leibniz angewandt worden. S. dessen Brief an L'Hôpital 1693 April 28 in Leibniz math. Schriften herausgeg. von Gerhardt II p. 239.

2. Unter der **Determinante des Systems von n^2 Elementen**, welche in n Reihen von je n Elementen stehen und aus $a_{i,k}$ entspringen, wenn i und k die Werthe $1, 2, .., n$ annehmen, versteht man das Aggregat der Producte von je n solchen Elementen, die sämmtlich aus verschiedenen Horizontal- und Verticalreihen entnommen sind. Das Anfangsglied der Determinante ist das Product der Elemente der Diagonalreihe

$$a_{1,1}\, a_{2,2} \,..\, a_{n,n}\,.$$

Aus dem Anfangsglied werden die übrigen Glieder abgeleitet, indem man die ersten Suffixe unverändert lässt und die zweiten permutirt. Die einzelnen Glieder werden positiv oder negativ genommen, je nachdem die Permutationen der Suffixe, durch welche sie entstanden sind, derselben Classe angehören als die erste Complexion der Suffixe, oder nicht.

Die Determinante von n^2 Elementen heisst n^{ten} **Grades**, weil ihre Glieder Producte von n Elementen sind. Sie hat $1.2 \ldots n$ Glieder, welche zur Hälfte positiv, zur andern Hälfte negativ sind (§. 1, 3), unter denen aber entgegengesetzt gleiche nicht vorkommen, so lange nicht besondere Beziehungen zwischen den einzelnen Elementen stattfinden. Man bezeichnet die Determinante nach Cauchy und Jacobi durch Einschluss des Systems der Elemente zwischen Verticallinien, oder durch das mit dem Doppelzeichen $\pm$ unter ein Summenzeichen gesetzte Anfangsglied, oder nach Vandermonde durch Aufstellung der Reihe der ersten Suffixe, welche zur Unterscheidung der Elemente dienen, über der Reihe der zweiten Suffixe*):

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & .. & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & .. & a_{2,n} \\ . & . & & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & .. & a_{n,n} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \,..\, a_{n,n} = \frac{1\,|\,2\,|\,..\,|\,n}{1\,|\,2\,|\,..\,|\,n} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & .. & n \\ 1 & 2 & .. & n \end{pmatrix}.$$

Beispiele:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - a_1 b.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = ab_1c_2 - ab_2c_1 + a_1b_2c - a_1bc_2 + a_2bc_1 - a_2b_1c.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} ab_1c_2d_3 - ab_1c_3d_2 + ab_2c_3d_1 - ab_2c_1d_3 + ab_3c_1d_2 - ab_3c_2d_1 \\ - a_1bc_2d_3 + a_1bc_3d_2 + a_1b_2cd_3 - a_1b_2c_3d - a_1b_3cd_2 + a_1b_3c_2d \\ + a_2bc_1d_3 - a_2bc_3d_1 - a_2b_1cd_3 + a_2b_1c_3d + a_2b_3cd_1 - a_2b_3c_1d \\ - a_3bc_1d_2 + a_3bc_2d_1 + a_3b_1cd_2 - a_3b_1c_2d - a_3b_2cd_1 + a_3b_2c_1d. \end{array}$$

---

*) Cauchy J. de l'école polyt. Cah. 17 p. 52. Jacobi Det. 4 und Crelle J. 15 p. 115. Vandermonde Hist. de l'acad. de Paris 1772, II p. 517. Die Determinanten sind von Leibniz (l. c.) erfunden worden, der mit Hülfe derselben die Resultante von n linearen Gleichungen für $n-1$ Unbekannte, sowie die Resultante von 2 beliebigen algebraischen Gleichungen für eine Unbekannte darzustellen suchte. Als zweiter Erfinder der Determinanten ist Cramer (vergl. §. 1, 1) zu nennen. Die von Cauchy eingeführte Benennung Determinante ist von den nach dem obigen Gesetz gebildeten Aggregaten hergenommen, welche Gauss (Disquis. arithm.) Determinanten der quadratischen Formen genannt hat. Später hat Cauchy (Exerc. de Math., Exerc. d'Analyse) den Namen Determinante wieder mit fonction alternée und mit dem von Laplace (vergl. §. 1, 2) gebrauchten Ausdruck Resultante vertauscht.

3. Die Glieder der Determinante können aus dem Anfangsglied auch dadurch abgeleitet werden, dass man die ersten Suffixe permutirt, während die zweiten unverändert ihre Plätze behalten. Bedeutet nämlich $k_1\, k_2 \ldots k_n$ irgend eine Permutation der Suffixe $12 \ldots n$, so drückt $a_{1,k_1}\, a_{2,k_2} \ldots a_{n,k_n}$ irgend ein Glied der Determinante aus. Dieses Glied wird aber aus dem Anfangsglied $a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ sowohl dadurch abgeleitet, dass man die zweiten Suffixe $1, 2, \ldots, n$ der Reihe nach durch $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ersetzt, als auch dadurch, dass man in der Reihe der ersten Suffixe k_1 durch 1, k_2 durch $2, \ldots, k_n$ durch n ersetzt. In beiden Fällen hat man die gleiche Anzahl Vertauschungen von jedesmal 2 Suffixen vorzunehmen, folglich erhält das abgeleitete Glied bei dem zweiten Verfahren dasselbe Zeichen, als beim ersten. Z. B. aus

$$a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}\, a_{4,4}\, a_{5,5}\, a_{6,6}$$

entspringt

$$a_{1,3}\, a_{2,2}\, a_{3,1}\, a_{4,4}\, a_{5,6}\, a_{6,5}$$

indem man die zweiten Suffixe 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit 3, 2, 1, 4, 6, 5 vertauscht. Dasselbe Glied kann man aus dem Anfangsglied auch dadurch finden, dass man die ersten Suffixe 3, 2, 1, 4, 6, 5 der Reihe nach in 1, 2, 3, 4, 5, 6 verwandelt. Bei dem einen wie bei den andern Verfahren werden 4 Suffixe durch andere ersetzt und in beiden Fällen erhält das abgeleitete Glied dasselbe Zeichen.

Zwei Systeme, deren eines die Horizontalreihen des andern als Verticalreihen enthält (und umgekehrt)

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n,n} \end{matrix}$$

haben einerlei Determinante $\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}$. Denn jedes Glied der einen Determinante kommt in der andern mit demselben Zeichen vor.

4. **Lehrsatz.** Die Determinante wechselt das Zeichen, wenn im System der Elemente eine Reihe mit einer parallelen Reihe vertauscht wird. Die Determinante verschwindet identisch, wenn die Elemente einer Reihe denen einer parallelen Reihe einzeln in derselben Ordnung gleich sind*).

Beweis. Ist R die gegebene Determinante, R' die durch Vertauschung von 2 parallelen Reihen der Elemente abgeleitete Determinante, so enthält R' dieselben Glieder als R mit entgegengesetzten Zeichen. Denn das Anfangsglied von R' entsteht aus dem Anfangsglied von R durch Vertauschung von 2 ersten oder 2 zweiten Suffixen, kommt also in R mit dem entgegengesetzten Zeichen vor. Alle andern Glieder von R', welche aus deren Anfangsglied durch eine ungerade (gerade) Anzahl Vertauschungen von jedesmal 2 Suffixen hervorgehen, entspringen aus dem Anfangsglied von R durch eine gerade (ungerade) Anzahl solcher Vertauschungen. Mithin kommen alle Glieder von R' in R mit den entgegengesetzten Zeichen vor, d. h. $R' = -R$.

---

*) LAPLACE Hist. de l'acad. de Paris 1772, II p. 297. VANDERMONDE ebendas. p. 518 u. 522.

Sind die in 2 parallelen Reihen stehenden Elemente einander der Reihe nach gleich, so wird durch Vertauschung dieser Reihen R in $-R$ verwandelt, das System der Elemente bleibt aber bei dieser Vertauschung unverändert, d. h. $-R=R$, folglich $R=0$ für beliebige Werthe der Elemente.

Z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ a_{n,1} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,1} & a_{1,3} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ a_{2,2} & a_{2,1} & a_{2,3} & \cdot\cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ a_{n,2} & a_{n,1} & a_{n,3} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \cdot\cdot & a_{1,n} & a_{1,1} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & \cdot\cdot & a_{2,n} & a_{2,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdot\cdot & a_{n,n} & a_{n,1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{2,2} & \cdot\cdot & a_{2,n} & a_{2,1} \\ a_{3,2} & \cdot\cdot & a_{3,n} & a_{3,1} \\ \cdot & \cdot\cdot & & \\ a_{n,2} & \cdot\cdot & a_{n,n} & a_{n,1} \\ a_{1,2} & \cdot\cdot & a_{1,n} & a_{1,1} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot\cdot & a_{2,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot\cdot & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \cdot\cdot & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Ueberhaupt: wenn sowohl $i, k, l, ..$ als auch $r, s, t, ..$ gegebene Permutationen von $1, 2, .., n$ bedeuten, so ist

$$\begin{vmatrix} a_{i,r} & a_{i,s} & a_{i,t} & \cdot \\ a_{k,r} & a_{k,s} & a_{k,t} & \cdot \\ a_{l,r} & a_{l,s} & a_{l,t} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = \varepsilon \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ a_{n,1} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{r,i} & a_{r,k} & a_{r,l} & \cdot \\ a_{s,i} & a_{s,k} & a_{s,l} & \cdot \\ a_{t,i} & a_{t,k} & a_{t,l} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix},$$

worin ε die positive oder negative Einheit bezeichnet, je nachdem die gegebenen Permutationen einer Classe angehören oder nicht.

5. **Lehrsatz.** Wenn die in einer Reihe stehenden Elemente des Systems mit Ausnahme eines einzigen verschwinden, so reducirt sich die Determinante des gegebenen Systems auf das Product des erwähnten Elements mit einer Determinante vom nächst niederen Grade*).

Beweis. Ist

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ a_{n,1} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

und unter den Elementen

$$a_{i,1} \; a_{i,2} \cdot\cdot \; a_{i,n}$$

nur $a_{i,k}$ von 0 verschieden, so mache man im gegebenen System die i^{te} Horizontalreihe der Elemente zur ersten Horizontalreihe und die k^{te} Verticalreihe zur ersten Verticalreihe, so dass R durch $(i-1)+(k-1)$ Zeichenwechsel (4) in

$$\varepsilon R = \begin{vmatrix} a_{i,k} & a_{i,1} & \cdot\cdot & a_{i,k-1} & a_{i,k+1} & \cdot\cdot & a_{i,n} \\ a_{1,k} & a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & & & & & \\ a_{i-1,k} & a_{i-1,1} & \cdot\cdot & & & & \\ a_{i+1,k} & a_{i+1,1} & \cdot\cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & & \\ a_{n,k} & a_{n,1} & \cdot\cdot & & & & \end{vmatrix}$$

*) Jacobi Det. 5.

übergeht, wo $\varepsilon = (-1)^{i+k}$. Nach der Voraussetzung verschwinden die Glieder von εR, in welchen das erste unter den zweiten Suffixen von k verschieden ist. Daher reducirt sich εR auf die Glieder, welche aus dem Anfangsgliede

$$a_{i,k}\ a_{1,1} \cdot\cdot\ a_{n,n}$$

durch Permutation der zweiten Suffixe $1, 2, .., k-1, k+1, .., n$ nach Ausschliessung von k hervorgehen, d. i. auf die Glieder einer Determinante $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades (2), welchen der Factor $a_{i,k}$ zugesetzt ist, also

$$\varepsilon R = a_{i,k} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdot\cdot & & & & \\ a_{i+1,1} & \cdot\cdot & & & & \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & \\ a_{n,1} & \cdot\cdot & & & & \end{vmatrix}$$

worin ε die angegebene Bedeutung hat.

Beispiel:
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \end{vmatrix} = -d_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & b_1 & b_2 & b_3 \\ c & c_1 & c_2 & c_3 \\ d & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

6. Umgekehrt folgt, dass jede Determinante als Determinante von einem höhern Grade dargestellt werden kann, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \\ a_{n,1} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_{n+1,1} & \cdot\cdot & a_{n+1,n} \\ 0 & a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & a_{n,1} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_{n+2,n+1} & a_{n+2,1} & \cdot\cdot & a_{n+2,n} \\ 0 & 1 & a_{n+1,1} & \cdot\cdot & a_{n+1,n} \\ 0 & 0 & a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & a_{n,1} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

u. s. w. Die Elemente

$$a_{n+1,1} \cdot\cdot\ a_{n+1,n}$$
$$a_{n+2,1} \cdot\cdot\ a_{n+2,n}\quad a_{n+2,n+1},$$

welche in der Entwickelung der transformirten Determinante nicht angetroffen werden, können jeden beliebigen Werth annehmen, also auch verschwinden.

7. Wenn alle Elemente verschwinden, welche auf einer Seite der Diagonalreihe stehen, so reducirt sich die Determinante des gegebenen Systems auf ihr Anfangsglied.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdot\cdot & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdot\cdot & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdot\cdot & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,3} & \cdot\cdot & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} \text{ u. s. f. (5)}$$

$$= a_{1,1}\ a_{2,2} \cdot\cdot\ a_{n,n}.$$

§. 3. Ordnung der Glieder einer Determinante nach den in einer Reihe stehenden Elementen.

1. **Lehrsatz.** Bedeuten i und k beliebige Suffixe aus der Reihe $1, 2, .., n$; R die Determinante $\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \,..\, a_{n,n}$; $\alpha_{i,k}$ den Coefficienten von $a_{i,k}$ in R d. h. $a_{i,k}\, \alpha_{i,k}$ das Aggregat der Glieder von R, welche das Element $a_{i,k}$ enthalten, so haben die Aggregate

$$a_{i,1}\;\alpha_{k,1} + a_{i,2}\;\alpha_{k,2} + \ldots + a_{i,n}\;\alpha_{k,n},$$
$$a_{1,i}\;\alpha_{1,k} + a_{2,i}\;\alpha_{2,k} + \ldots + a_{n,i}\;\alpha_{n,k}$$

den Werth R oder 0, je nachdem i und k gleich oder ungleich sind*).

Beweis. Jedes Glied von R enthält je eines der Elemente

$$a_{i,1},\; a_{i,2},\; \ldots,\; a_{i,n},$$

welche die i^{te} Horizontalreihe ausmachen. Nach Voraussetzung ist $a_{i,1}\,\alpha_{i,1}$ das Aggregat der Glieder von R, worin das Element $a_{i,1}$ vorkommt, u. s. w. Daher

$$R = a_{i,1}\;\alpha_{i,1} + a_{i,2}\;\alpha_{i,2} + \ldots + a_{i,n}\;\alpha_{i,n}.$$

Auf demselben Wege findet man die Identität

$$R = a_{1,i}\;\alpha_{1,i} + a_{2,i}\;\alpha_{2,i} + \ldots + a_{n,i}\;\alpha_{n,i}.$$

Setzt man hierin

$$a_{i,1} = a_{k,1},\; a_{i,2} = a_{k,2}, \ldots \text{ oder } a_{1,i} = a_{1,k},\; a_{2,i} = a_{2,k}, \ldots$$

so erhält man Aggregate, welche den Determinanten von Systemen gleichgelten, worin die Elemente einer Reihe den Elementen einer parallelen Reihe einzeln gleich sind. Diese Determinanten verschwinden identisch (§. 2, 4).

2. Um eine Determinante mit einem Factor zu multipliciren, hat man alle Elemente einer Reihe mit demselben zu multipliciren. Den gemeinschaftlichen Factor aller Elemente einer Reihe kann man vor die Determinante setzen. Z. B.

$$p\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa & b & c \\ pa_1 & b_1 & c_1 \\ pa_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa & pb & pc \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Dies ergiebt sich, wenn die Determinante unter der Form $a\alpha + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$ oder $a\alpha + b\beta + c\gamma$ vorgestellt wird. Ferner ist

$$-\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & b \\ -a_1 & b_1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b_1 & c_1 \\ a & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c_1 \\ a & b & c_2 \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & c_1 \\ 1 & 1 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

*) Cramer l. c. Cauchy l. c. p. 66. Jacobi Det. 6. Die aus diesem Satze für $n=3$ entspringenden Identitäten finden sich bei Lagrange sur les pyr. 7 (Mém. de l'acad. de Berlin 1773).

3. Sind alle Elemente einer Reihe Aggregate von m Gliedern, so lässt sich die Determinante in das Aggregat von m Determinanten auflösen. Wenn

$$\begin{aligned} a_{i,1} &= p_1 + q_1 + r_1 + \cdots \\ a_{i,2} &= p_2 + q_2 + r_2 + \cdots \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} R = & \; a_{i,1}\alpha_{i,1} + a_{i,2}\alpha_{i,2} + \cdots + a_{i,n}\alpha_{i,n} \\ = & \; p_1\alpha_{i,1} + p_2\alpha_{i,2} + \cdots + p_n\alpha_{i,n} \\ & + q_1\alpha_{i,1} + q_2\alpha_{i,2} + \cdots + q_n\alpha_{i,n} \\ & + r_1\alpha_{i,1} + r_2\alpha_{i,2} + \cdots + r_2\alpha_{i,n} \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

Die einzelnen Determinanten, in welche R sich zerlegen lässt, entspringen aus R, indem an die Stelle der Elemente

$$a_{i,1} \; a_{i,2} \cdots a_{i,n}$$

die Glieder derselben

$$\begin{matrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{matrix}$$

der Reihe nach gesetzt werden. Z. B.

$$\begin{vmatrix} a+a' & a_1 & a_2 \\ a+b' & b_1 & b_2 \\ c+c' & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & a_1 & a_2 \\ b' & b_1 & b_2 \\ c' & c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

4. Der Werth einer Determinante wird nicht verändert, wenn man zu den Elementen einer Reihe die mit einem beliebigen gemeinschaftlichen Factor multiplicirten Elemente einer parallelen Reihe addirt *)

$$\begin{vmatrix} a+bp & b & c \\ a+b_1p & b_1 & c_1 \\ a+b_2p & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} b & b & c \\ b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

(vergl. 3. u. 2.), wovon die zweite Determinante identisch verschwindet (§. 2,4).

Beispiele:

$$\begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b \\ x_1-a & y_1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a-a & b-b \\ 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$ (vergl. §. 2, 6).

5. Bestimmung des Coefficienten $\alpha_{i,k}$, welchen das Element $a_{i,k}$ in der Determinante R hat. Um die Glieder von R, in denen $a_{i,k}$ vorkommt, übrig zu behalten, setze man die Elemente einer Reihe, welche das Element $a_{i,k}$ enthält, gleich 0 mit Ausnahme von $a_{i,k}$. Setzt man dann 1 an die Stelle von $a_{i,k}$, so findet man den gesuchten Coefficienten

$$\alpha_{i,k} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & & \cdot & & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,k} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n\,n} \end{vmatrix},$$

*) Jacobi Crelle J. 22 p. 371.

welcher sich als Determinante $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades darstellen lässt (§. 2, 5). Wenn man die i^{te} Horizontalreihe zur ersten Horizontalreihe und die k^{te} Verticalreihe zur ersten Verticalreihe macht, so finden $(i-1)+(k-1)$ Zeichenwechsel in $\alpha_{i,k}$ statt (§. 2, 4), folglich ist

$$\alpha_{i,k} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdot\cdot & & & & \\ a_{i+1,1} & \cdot\cdot & & & & \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & \\ a_{n,1} & \cdot\cdot & & & & \end{vmatrix}.$$

Durch ein analoges Verfahren leitet man aus R den Coefficienten ab, welchen das Product $a_{i,k}\, a_{r,s}$ in R hat, indem man 1 an die Stelle von $a_{i,k}$ und $a_{r,s}$ setzt und 0 an die Stelle der übrigen Elemente, welche die in $a_{i,k}$ und $a_{r,s}$ sich schneidenden Reihen des Systems enthalten. Dieser Coefficient reducirt sich auf eine Determinante $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades u. s. f.

6. **Bestimmung von $\alpha_{i,k}$ durch cyclische Vertauschung.** Um aus R eine dem absoluten Werth nach gleiche Determinante, deren Anfangselement $a_{i,k}$ ist, durch cyclische Vertauschung abzuleiten, hat man nach einander $i-1$ cyclische Vertauschungen der Horizontalreihen und $k-1$ cyclische Vertauschungen der Verticalreihen vorzunehmen, wodurch

$$(i-1+k-1)(n-1)$$

Zeichenwechsel eintreten (§. 1, 5). Daher ist (5)

$$\alpha_{i,k} = (-1)^{(n-1)(i+k)} \begin{vmatrix} a_{i+1,k+1} & \cdot\cdot & a_{i+1,n} & a_{i+1,1} & \cdot\cdot, & a_{i+1,k-1} \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & \\ a_{n,k+1} & \cdot\cdot & & & & \\ a_{1,k+1} & \cdot\cdot & & & & \\ \cdot & \cdot\cdot & & & & \\ a_{i-1,k+1} & \cdot\cdot & & & & \end{vmatrix}.$$

Bei Determinanten **ungeraden Grades** können die Coefficienten $\alpha_{i,k}$ aus $\alpha_{1,1}$ durch cyclische Vertauschung **ohne Zeichenwechsel** abgeleitet werden. Zu recurrenter Bildung der Determinanten hat man demnach:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b & c \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b & c & d \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 & d_3 \\ b & c & d \\ b_1 & c_1 & d_1 \end{vmatrix} - a_3 \begin{vmatrix} b & c & d \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ c_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

7. **Bestimmung von $\alpha_{i,k}$ durch Differentiation.** Wenn die Elemente des Systems von einander unabhängig sind, so kommt bei der Differentiation von R in Bezug auf $a_{i,k}$ nur das Aggregat $a_{i,k}\, \alpha_{i,k}$ in Betracht. Nun ist $\alpha_{i,k}$ von $a_{i,k}$ unabhängig, folglich

$$\frac{\partial R}{\partial a_{i,k}} = \alpha_{i,k}\ ^{*}).$$

*) Jacobi Det. 6.

Der Coefficient von $a_{i,k}$ in R kann demnach durch den partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial R}{\partial a_{i,k}}$$

ausgedrückt werden.

Der Coefficient von $a_{i,k}\, a_{r,s}$ in R erscheint als Coefficient von $a_{r,s}$ in $\alpha_{i,k}$ und kann demnach durch Differentiation von $\alpha_{i,k}$ nach $a_{r,s}$ gefunden, mithin durch

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_{i,k}\, \partial a_{r,s}} \text{ *)}$$

ausgedrückt werden. Aus diesem Coefficienten lässt sich der Coefficient von $a_{r,k}\, a_{i,s}$ in R ableiten, wenn man die ersten Suffixe i und r, d. h. die i^{te} Horizontalreihe des gegebenen Systems mit der r^{ten} vertauscht. Dabei erleidet R einen Zeichenwechsel, also ist der gesuchte Coefficient

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_{r,k}\, \partial a_{i,s}} = -\frac{\partial^2 R}{\partial a_{i,k}\, \partial a_{r,s}}.$$

Analog lässt sich der Coefficient von $a_{i,k}\, a_{r,s}\, a_{u,v}$ in R bestimmen. Man findet dabei Relationen zwischen den dritten partiellen Differentialquotienten von R u. s. w.

8. Sind die Elemente des Systems, welche dieselben Suffixe in umgekehrter Ordnung haben, z. B. $a_{i,k}$ und $a_{k,i}$, von einander abhängig, so sind auch die Determinanten m^{ten} Grades

$$P = \begin{vmatrix} a_{i,r} & a_{i,s} & a_{i,t} & \cdot \\ a_{k,r} & a_{k,s} & a_{k,t} & \cdot \\ a_{l,r} & a_{l,s} & a_{l,t} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} \text{ und } Q = \begin{vmatrix} a_{r,i} & a_{r,k} & a_{r,l} & \cdot \\ a_{s,i} & a_{s,k} & a_{s,l} & \cdot \\ a_{t,i} & a_{t,k} & a_{t,l} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix},$$

deren eine aus der andern dadurch entsteht, dass die Reihe der ersten Suffixe mit der Reihe der zweiten Suffixe vertauscht wird, von einander abhängig.

I. Wenn insbesondere $a_{k,i} = a_{i,k}$, so ist $Q = P$, weil

$$P = \begin{vmatrix} a_{r,i} & a_{s,i} & a_{t,i} & \cdot \\ a_{r,k} & a_{s,k} & a_{t,k} & \cdot \\ a_{r,l} & a_{s,l} & a_{t,l} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{r,i} & a_{r,k} & a_{r,l} & \cdot \\ a_{s,i} & a_{s,k} & a_{s,l} & \cdot \\ a_{t,i} & a_{t,k} & a_{t,l} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} \quad (§. 2, 3).$$

II. Wenn $a_{k,i} = -a_{i,k}$, $a_{i,i} = 0$, so ist $Q = (-1)^m P$. Multiplicirt man nämlich jede Verticalreihe von P mit -1, also (2) P mit $(-1)^m$, so erhält man

$$(-1)^m P = \begin{vmatrix} a_{r,i} & a_{s,i} & a_{t,i} & \cdot \\ a_{r,k} & a_{s,k} & a_{t,k} & \cdot \\ a_{r,l} & a_{s,l} & a_{t,l} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{r,i} & a_{r,k} & a_{r,l} & \cdot \\ a_{s,i} & a_{s,k} & a_{s,l} & \cdot \\ a_{t,i} & a_{t,k} & a_{t,l} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} \quad (§. 2, 3).$$

Ist die Reihe der Suffixe $r, s, t, ..$ eine Permutation der Suffixe $i, k, l, ..$ und m ungerade, so ist Q nicht nur $= P$ (§. 2, 4), sondern auch $= -P$, d. h. die Determinante verschwindet identisch.

9. **Lehrsatz.** Wenn R wie oben die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ a_{n,1} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

*) Jacobi Det. 10.

und $\alpha_{i,k}$ den Coefficienten von $a_{i,k}$ in R bedeutet, so ist unter der Voraussetzung $a_{k,i} = a_{i,k}$

$$\alpha_{i,k} = \alpha_{k,i} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial a_{i,k}} \text{ *)}$$

$$\alpha_{i,i} = \frac{\partial R}{\partial a_{i,i}} .$$

Dagegen ist unter der Voraussetzung $a_{k,i} = -a_{i,k}$ und $a_{i,i} = 0$

$$R = (-1)^n R, \quad \alpha_{i,k} = (-1)^{n-1} \alpha_{k,i}$$

d. h. bei geradem n

$$\alpha_{i,k} = -\alpha_{k,i} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial a_{i,k}} .$$

$$\alpha_{i,i} = 0$$

und bei ungeradem n

$$R = 0 \text{ **)}, \quad \alpha_{i,k} = \alpha_{k,i} .$$

Beweis. Die über R und $\alpha_{i,k}$ aufgestellten Behauptungen folgen aus den im vorigen Artikel gefundenen Eigenschaften von P und Q (vergl. 6). Ferner ist wegen des Zusammenhangs zwischen den correspondirenden Elementen $a_{i,k}$ und $a_{k,i}$ (7)

$$\frac{\partial R}{\partial a_{i,k}} = \alpha_{i,k} + \alpha_{k,i}\frac{\partial a_{k,i}}{\partial a_{i,k}} .$$

Nach der ersten Voraussetzung ist aber

$$\frac{\partial a_{k,i}}{\partial a_{i,k}} = 1, \quad \alpha_{k,i} = \alpha_{i,k} ,$$

folglich

$$\frac{\partial R}{\partial a_{i,k}} = 2\alpha_{i,k} .$$

Gemäss der zweiten Voraussetzung ist

$$\frac{\partial a_{k,i}}{\partial a_{i,k}} = -1 ,$$

folglich (7)

$$\frac{\partial R}{\partial a_{i,k}} = \alpha_{i,k} - \alpha_{k,i} .$$

Bei geradem n ist $-\alpha_{k,i} = \alpha_{i,k}$, mithin

$$\frac{\partial R}{\partial a_{i,k}} = 2\alpha_{i,k} .$$

Bei ungeradem n verschwindet $\frac{\partial R}{\partial a_{i,k}}$ identisch, wie R selbst, und die Gleichung

$$\frac{\partial R}{\partial a_{i,k}} = \alpha_{i,k} - \alpha_{k,i}$$

giebt das bereits erhaltene Resultat $\alpha_{i,k} = \alpha_{k,i}$.

10. **Differential einer Determinante.** Wenn alle Elemente des Systems als von einander unabhängige Variable zu betrachten sind, so ist vermöge der Gleichung (7)

$$\frac{\partial R}{\partial a_{i,k}} = \alpha_{i,k}$$

das vollständige Differential

$$dR = \sum_{i,k} \alpha_{i,k}\, da_{i,k} \text{ ***)}$$

---

*) JACOBI Crelle J. 12 p. 20. **) JACOBI Crelle J. 2 p. 354. ***) JACOBI Det. 6

eine Summe, deren Glieder man aus $\alpha_{i,k}\, da_{i,k}$ ableitet, indem man für i und k alle Suffixe von 1 bis n setzt.

Sind z. B. $y_1, y_2, .., y_n$ Functionen von x, bezeichnet man den k^{ten} Differentialquotienten von y_i durch $y_{i,k}$, bildet die Determinante

$$R_n = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & .. & y_n \\ y_{1,1} & y_{2,1} & .. & y_{n,1} \\ . & . & & . \\ y_{1,n-1} & y_{2,n-1} & .. & y_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

und bezeichnet mit $\eta_{i,k}$ den Coefficienten von $y_{i,k}$ in R_n, so hat man nach der aufgestellten Formel

$$\frac{dR_n}{dx} = \sum_{i,k} \eta_{i,k} \frac{dy_{i,k}}{dx} = \sum_{i,k} \eta_{i,k}\, y_{i,k+1}\,.$$

Das Aggregat (1)

$$\eta_{1,k}\, y_{1,k+1} + \eta_{2,k}\, y_{2,k+1} + .. + \eta_{n,k}\, y_{n,k+1}$$

verschwindet für jedes k unter $n-1$, folglich bleibt

$$\frac{dR_n}{dx} = \sum_i \eta_{i,n-1}\, y_{i,n}\ ^{*)}.$$

11. **Lehrsatz.** Wenn $R = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} .. a_{n,n}$ und $\alpha_{i,k}$ der Coefficient des Elements $a_{i,k}$ in R ist; wenn ferner $B = \Sigma \pm b_{1,1}\, b_{2,2} .. b_{n-1,n-1}$ und $\beta_{i,k}$ der Coefficient des Elements $b_{i,k}$ in B ist; wenn man endlich aus B neue Determinanten B_i dadurch ableitet, dass man die Elemente der ersten Verticalreihe $b_{1,1}$, $b_{2,1}, .., b_{n-1,1}$ durch die Elemente $a_{1,i}, a_{2,i}, .., a_{n-1,i}$ ersetzt, so ist identisch

$$\alpha_{n,1}\, B_1 + \alpha_{n,2}\, B_2 + .. + \alpha_{n,n}\, B_n = 0\ ^{**)}.$$

Beweis. Nach (1) hat man die Identitäten

$$\begin{array}{llll} \alpha_{n,1}\, a_{1,1} & + \alpha_{n,2}\, a_{1,2} & + .. + \alpha_{n,n}\, a_{1,n} & = 0 \\ \alpha_{n,1}\, a_{2,1} & + \alpha_{n,2}\, a_{2,2} & + .. + \alpha_{n,n}\, a_{2,n} & = 0 \\ . & . & . & \\ \alpha_{n,1}\, a_{n-1,1} & + \alpha_{n,2}\, a_{n-1,2} & + .. + \alpha_{n,n}\, a_{n-1,n} & = 0. \end{array}$$

Wenn man diese Gleichungen der Reihe nach mit den Grössen

$$\beta_{1,1},\ \beta_{2,1},\ ..,\ \beta_{n-1,1}$$

multiplicirt und die erhaltenen Gleichungen addirt, so hat in der Summe die Grösse $\alpha_{n,i}$ den Coefficienten

$$B_i = a_{1,i}\, \beta_{1,1} + a_{2,i}\, \beta_{2,1} + .. + a_{n-1,i}\, \beta_{n-1,1}\,,$$

welcher aus der Determinante

$$B = b_{1,1}\, \beta_{1,1} + b_{2,1}\, \beta_{2,1} + .. + b_{n-1,1}\, \beta_{n-1,1}$$

dadurch entspringt, dass an die Stelle der Elemente $b_{1,1}, b_{2,1}, .. b_{n-1,1}$ die Elemente $a_{1,i}, a_{2,i}, .., a_{n-1,i}$ treten.

Beispiele. Schreibt man zur Abkürzung

$$(ab) \qquad (abc) \qquad (abcd) \qquad ..$$

statt

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \quad ..,$$

---

*) Abel Crelle J. 2 p. 22. Malmstèn Crelle J. 39 p. 91.

**) Bézout (équat. algébr. 1779 §. 220) hat die einfachsten Fälle dieser Identität angegeben.

so erhält man

$$(bc)(ad) + (ca)(bd) + (ab)(cd) = 0 \text{ *)}$$
$$(bcd)(aef) - (cda)(bef) + (dab)(cef) - (abc)(def) = 0$$
$$(bcde)(afgh) + (cdea)(bfgh) + (deab)(cfgh)$$
$$+ (eabc)(dfgh) + (abcd)(efgh) = 0 \text{ u. s. w.}$$

Anmerkung. Die entsprechenden geometrischen Sätze (vergl. unten §. 16) hat MONGE 1809 abgeleitet (Journ. de l'éc. polyt. Cah. 15 p. 68), später MÖBIUS (baryc. Calc. §. 166 u. 171). Der obige Lehrsatz ist in der allgemeinen Zerlegung des Products von 2 Determinanten enthalten, welche SYLVESTER (Philos. Mag. 1851, II p. 142, vergl. 1852, II p. 342) gelehrt hat und von welcher FAÀ DE BRUNO (Liouv. J. 17 p. 190) einen einfachen Beweis mitgetheilt hat.

§. 4. Zerlegung einer Determinante in eine Summe von Producten aus partiellen Determinanten.

1. **Lehrsatz.** Man vertheile die Horizontalreihen des gegebenen Systems von n^2 Elementen in Gruppen, die ersten α Horizontalreihen in die erste Gruppe, die folgenden β in die zweite, die folgenden γ in die dritte u. s. w., so dass $\alpha + \beta + \gamma + \ldots = n$.

Aus einer beliebigen (aufsteigend geordneten) Combination von α Verticalreihen der ersten Gruppe bilde man die Determinante A vom α^{ten} Grade.

Unter den Verticalreihen der zweiten Gruppe lasse man die Fortsetzungen der in A vorkommenden Verticalreihen weg und bilde aus einer beliebigen Combination von β der übrigen Verticalreihen die Determinante B vom β^{ten} Grade.

Unter den Verticalreihen der dritten Gruppe lasse man die Fortsetzungen der in A und B vorkommenden Verticalreihen weg und bilde aus einer beliebigen Combination von γ der übrigen Verticalreihen die Determinante C vom γ^{ten} Grade u. s. f.

Unter den Verticalreihen der letzten Gruppe lasse man die Fortsetzungen der in $A, B, C, \ldots$ vorkommenden Verticalreihen weg und bilde aus den übrigen Verticalreihen die Determinante $(n-\alpha-\beta-\gamma-\ldots)^{\text{ten}}$ Grades. Man bilde das Product $ABC\ldots$ auf alle möglichen Arten und gebe den einzelnen Producten das Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem die Reihe aller zweiten Suffixe eine Permutation erster oder zweiter Classe der gegebenen zweiten Suffixe ist: das Aggregat dieser Producte ist die gegebene Determinante **).

Beweis. Ein Product wie $ABC\ldots$ umfasst diejenigen Glieder der Determinante, welche aus dem Anfangsglied $a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ dadurch hervorgehen, dass man die ersten Suffixe unverändert lässt, dagegen die zweiten Suffixe in aufstei-

*) Diese Identität kommt nach VANDERMONDE's Angabe (l. c. p. 527) bereits in den von FONTAINE 1764 herausgegebenen Memoiren vor (au commencement de sa seconde méthode du calcul intégral).

**) JACOBI Det. 8 nach dem Vorgange von LAPLACE l. c. p. 294.

gend geordnete Gruppen von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Suffixen vertheilt und die Suffixe der einzelnen Gruppen permutirt. Wenn man die Gruppirung auf alle möglichen Arten ausführt und jedesmal die Suffixe der einzelnen Gruppen permutirt, so erhält man alle Permutationen der gegebenen zweiten Suffixe. Das Aggregat aller Producte $ABC\ldots$ umfasst demnach alle Glieder der gegebenen Determinante.

Die Determinante A lässt sich auf

$$\binom{n}{\alpha} = \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-\alpha+1)}{1.\;2\;\ldots\;\alpha}$$

verschiedene Arten zusammensetzen, weil es von n Suffixen soviel Combinationen zu je α giebt. Zu jeder Determinante A lassen sich $\binom{n-\alpha}{\beta}$ verschiedene Determinanten B setzen, weil es von den $n-\alpha$ übrigen Suffixen soviel Combinationen zu je β giebt. Zu jedem Product AB lassen sich $\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}$ verschiedene Determinanten C setzen u. s. f. Daher lassen sich überhaupt

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}\ldots = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta.1.2\ldots\gamma\ldots}$$

Producte $ABC\ldots$ bilden, deren Aggregat die gegebene Determinante ist. In der That findet man die Anzahl der Glieder der Determinante $(1.2\ldots n)$, wenn man die Anzahl der Producte $ABC\ldots$ mit der Anzahl der Glieder eines solchen Products $(1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta.1.2\ldots\gamma\ldots)$ multiplicirt.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & a_3 \\ b & b_1 & b_2 & b_3 \\ c & c_1 & c_2 & c_3 \\ d & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a_2 \\ b & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a_3 \\ b & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & c_3 \\ d & d_3 \end{vmatrix}$$
$$- \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & c_2 \\ d & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & c_1 \\ d & d_1 \end{vmatrix}.$$

Die Zerlegung einer Determinante n^{ten} Grades in eine Summe von Producten aus je einer Determinante 2ten und einer Determinante $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades findet man ausführlich behandelt von Jacobi Det. 9 u. 10.

2. Wenn die Elemente des gegebenen Systems verschwinden, welche i Verticalreihen mit $n-i$ Horizontalreihen gemein haben, so reducirt sich die Determinante auf des Product einer Determinante i^{ten} Grades mit einer Determinante $(n-i)^{\text{ten}}$ Grades*).

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,i} & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,i} & a_{i,i+1} & \ldots & a_{i,n} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{i+1,i+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n,i+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,i} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,i} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{i+1,i+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \cdot & & \cdot\,\cdot \\ a_{n,i+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Zerlegt man nämlich die gegebene Determinante in eine Summe von Producten aus Determinanten i^{ten} und $(n-i)^{\text{ten}}$ Grades, nachdem man die in der Voraussetzung erwähnten $(n-i)$ Horizontalreihen und die übrigen i Horizontalreihen in je eine Gruppe vereint hat, so ist unter den zu bildenden Determinanten $(n-i)^{\text{ten}}$ Grades nur eine von Null verschieden.

*) Jacobi Det. 5.

3. Wenn man zwei Permutationen von $1, 2, .., n$ im Allgemeinen durch

$$\begin{matrix} f, & g, & .., & r, & s, & .. \\ i, & k, & .., & u, & v, & .. \end{matrix}$$

bezeichnet und darin $f, g, ..$ und $i, k, ..$ Gruppen von m Suffixen sind, während $r, s, ..$ und $u, v, ..$ die übrigen $n-m$ Suffixe bedeuten, so heisst die Determinante m^{ten} Grades

$$\begin{vmatrix} a_{f,i} & a_{f,k} & \cdot \\ a_{g,i} & a_{g,k} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

eine $(n-m)^{\text{te}}$ partielle Determinante in Bezug auf die Determinante n^{ten} Grades

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \\ a_{n,1} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} \text{*)}.$$

Der Coefficient dieser partiellen Determinante in R lässt sich durch die Bemerkung finden, dass

$$\begin{vmatrix} a_{f,i} & a_{f,k} & \cdot\cdot & a_{f,u} & a_{f,v} & \cdot \\ a_{g,i} & a_{g,k} & \cdot\cdot & a_{g,u} & a_{g,v} & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ a_{r,i} & a_{r,k} & \cdot\cdot & a_{r,u} & a_{r,v} & \cdot \\ a_{s,i} & a_{s,k} & \cdot\cdot & a_{s,u} & a_{s,v} & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = \varepsilon R,$$

worin ε die positive oder negative Einheit bedeutet, je nachdem die gegebenen Permutationen einer Classe angehören oder nicht (§. 2, 4). Durch Zerlegung von εR in Producte aus Determinanten m^{ten} und $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades ergiebt sich als Coefficient der partiellen Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{f,i} & a_{f,k} & \cdot \\ a_{g,i} & a_{g,k} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

in εR die partielle Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{r,u} & a_{r,v} & \cdot \\ a_{s,u} & a_{s,v} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}.$$

Der gesuchte Coefficient ist demnach, wenn ε die angegebene Bedeutung hat,

$$\varepsilon \begin{vmatrix} a_{r,u} & a_{r,v} & \cdot \\ a_{s,u} & a_{s,v} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

übereinstimmend mit dem Coefficienten des Products $a_{f,i}\, a_{g,k} ..$ in R (§. 3, 7)

$$\frac{\partial^m R}{\partial a_{f,i}\, \partial a_{g,k} \cdot\cdot}.$$

4. Die Entwickelung der Determinante

$$f(z) = \begin{vmatrix} a_{1,1}+z & a_{1,2} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}+z & \cdot\cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot\cdot & a_{n,n}+z \end{vmatrix}$$

---

*) Nach der von JACOBI Crelle J. 27 p. 206 und 30 p. 136 angenommenen Benennung. Vergl. die systèmes dérivés bei CAUCHY l. c. p. 96.

nach Potenzen von z giebt

$$R_n + z\Sigma R_{n-1} + z^2 \Sigma R_{n-2} + \ldots + z^{n-1}\Sigma R_1 + z^n,$$

wo

$$R_m = \begin{vmatrix} a_{i,i} & a_{i,k} & \cdot \\ a_{k,i} & a_{k,k} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

eine partielle Determinante m^{ten} Grades ist, deren Diagonalreihe aus Elementen der Diagonalreihe von R_n besteht, und ΣR_m die Summe der Determinanten bedeutet, welche aus R_m entspringen, indem für die Suffixe $i, k, \ldots$ alle verschiedenen Combinationen von je m aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ gesetzt werden *).

Beweis. Die Uebereinstimmung des ersten Gliedes R_n mit $f(0)$ und die Richtigkeit des letzten Gliedes z^n ist unmittelbar wahrzunehmen. Die Glieder der Entwickelung, welche z^m enthalten, entspringen aus den Gliedern der Determinante $f(z)$, worin irgend welche m Elemente der Diagonalreihe vorkommen. Bedeutet nun $i, k, \ldots$ irgend eine (aufsteigend geordnete) Combination von m Suffixen der Reihe $1, 2, \ldots n$ und $r, s, \ldots$ die Reihe der übrigen Suffixe, so ist (§. 2, 4)

$$f(z) = \begin{vmatrix} a_{i,i}+z & a_{i,k} & \ldots & a_{i,r} & a_{i,s} & \cdot \\ a_{k,i} & a_{k,k}+z & \ldots & a_{k,r} & a_{k,s} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ a_{r,i} & a_{r,k} & \ldots & a_{r,r}+z & a_{r,s} & \cdot \\ a_{s,i} & a_{s,k} & \ldots & a_{s,r} & a_{s,s}+z & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \end{vmatrix}.$$

Aus dieser Form von $f(z)$ erkennt man nach Lehrsatz 1, dass die Entwickelung des Products

$$\begin{vmatrix} a_{i,i}+z & a_{i,k} & \cdot \\ a_{k,i} & a_{k,k}+z & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{r,r}+z & a_{r,s} & \cdot \\ a_{s,r} & a_{s,s}+z & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

einen Theil der gesuchten Entwickelung von der Determinante $f(z)$ bildet. Die Entwickelung des ersten Factors nach Potenzen von z schliesst mit z^m, die des zweiten Factors beginnt mit

$$\begin{vmatrix} a_{r,r} & a_{r,s} & \cdot \\ a_{s,r} & a_{s,s} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}.$$

Daher ist

$$z^m \begin{vmatrix} a_{r,r} & a_{r,s} & \cdot \\ a_{s,r} & a_{s,s} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

die allgemeine Formel für ein Glied der gesuchten Entwickelung, worin z^m vorkommt. Indem man für die Suffixe $i, k, \ldots$ alle möglichen Combinationen von je m aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$, folglich für $r, s, \ldots$ alle möglichen Combinationen von je $n-m$ aus derselben Reihe setzt, erhält man alle Glieder von $f(z)$, in denen der Factor z^m anzutreffen ist.

*) Jacobi Crelle J. 12 p. 15.

§. 5. Anordnung einer Determinante nach Producten der Elemente von zwei sich schneidenden Reihen.

1. **Lehrsatz.** Bedeutet R die Determinante $\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \,..\, a_{n,n}$, R' den Coefficienten des Elements $a_{r,s}$ in R, $\alpha_{i,k}$ den Coefficienten des Elements $a_{i,k}$ in R', so ist

$$R = a_{r,s} R' - \sum_{i,k} a_{r,k}\, a_{i,s}\, \alpha_{i,k}\,.$$

Die einzelnen Glieder der Summe werden dargestellt, indem man

$$i = 1, 2, .., r-1, r+1, .., n$$
$$k = 1, 2, .., s-1, s+1, .., n$$

setzt *).

Beweis. Die Glieder der Determinante R enthalten entweder das Element $a_{r,s}$, oder das Product von 2 Elementen der in $a_{r,s}$ sich schneidenden Reihen z. B. $a_{r,k}\, a_{i,s}$, wo k irgend ein von s verschiedenes und i irgend ein von r verschiedenes Suffix bezeichnet. Das Aggregat der Glieder von R, in denen $a_{r,s}$ vorkommt, ist $a_{r,s} R'$ nach Voraussetzung. Der Coefficient des Products $a_{r,k}\, a_{i,s}$ in R ist entgegengesetzt gleich dem Coefficienten von $a_{r,s}\, a_{i,k}$ in R (§. 3, 7), mithin entgegengesetzt gleich dem Coefficienten von $a_{i,k}$ in R'. Daher ist $-\alpha_{i,k}$ der Coefficient von $a_{r,k}\, a_{i,s}$ in R.

Zusatz. Nach der obigen Bezeichnung ist der Coefficient des Elements $a_{r,k}$ in R

$$-\sum_i a_{i,s}\, \alpha_{i,k}, \quad i = 1, 2, .., r-1, r+1, .., n.$$

Ebenso ist der Coefficient von $a_{i,s}$ in R

$$-\sum_k a_{r,k}\, \alpha_{i,k}, \quad k = 1, 2, .., s-1, s+1, .., n.$$

2. Ist das System der gegebenen Elemente symmetrisch, so dass $a_{k,i} = a_{i,k}$, ist R' der Coefficient des Elements $a_{r,r}$ in R und $\alpha_{i,k}$ der Coefficient des Elements $a_{i,k}$ in R', so findet man (1)

$$R = a_{r,r} R' - \sum_{i,k} a_{r,i}\, a_{r,k}\, \alpha_{i,k}\,.$$

Die Glieder der Summe, welche durch ungleiche i und k entspringen, sind in diesem Falle paarweise einander gleich, weil $\alpha_{k,i} = \alpha_{i,k}$ (§. 3, 8).

Beispiele:

$$\begin{vmatrix} a & b_{01} & b_{02} \\ b_{01} & a_1 & b_{12} \\ b_{02} & a_{12} & a_2 \end{vmatrix} = a\, a_1\, a_2 - a\, b_{12}^2 - a_1\, b_{02}^2 - a_2\, b_{01}^2 + 2 b_{01}\, b_{02}\, b_{12}\,.$$

$$\begin{vmatrix} a & b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ b_{01} & a_1 & b_{12} & b_{13} \\ b_{02} & b_{12} & a_2 & b_{23} \\ b_{03} & b_{13} & b_{23} & a_3 \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a\,(a_1\, a_2\, a_3 - a_1\, b_{23}^2 - a_2\, b_{13}^2 - a_3\, b_{12}^2 + 2 b_{12}\, b_{13}\, b_{23}) \\ & - b_{01}^2 (a_2 a_3 - b_{23}^2) - b_{02}^2 (a_1\, a_3 - b_{13}^2) - b_{03}^2 (a_1\, a_2 - b_{12}^2) \\ & + 2 b_{01}\, b_{02} (a_3 b_{12} - b_{13} b_{23}) + 2 b_{01}\, b_{03} (a_2 b_{13} - b_{12} b_{23}) \\ & + 2 b_{02}\, b_{03} (a_1 b_{23} - b_{12} b_{13}). \end{aligned}$$

*) Ein besondrer Fall dieser Formel findet sich bei Cauchy (J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 69).

Insbesondere ist

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2abc.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c_1 & b_1 \\ b & c_1 & 0 & a_1 \\ c & b_1 & a_1 & 0 \end{vmatrix} = a^2 a_1^2 + b^2 b_1^2 + c^2 c_1^2 - 2\,aa_1\,bb_1 - 2\,aa_1\,cc_1 - 2\,bb_1\,cc_1$$
$$= (aa_1 + bb_1 - cc_1)^2 - 4\,aa_1\,bb_1$$
$$= -(\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1})(\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} - \sqrt{cc_1})(\sqrt{aa_1} - \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1})(-\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1}).$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 - 2\,ab - 2\,bc - 2\,ac$$
$$= (a + b - c)^2 - 4\,ab$$
$$= -(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c})(-\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

§. 6. Producte von Determinanten.

1. **Lehrsatz.** Man bilde aus zwei gegebenen Systemen von Elementen

$$\begin{matrix} a_{1,1} & .. & a_{1,p} \\ . & & .. \\ a_{n,1} & .. & a_{n,p} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b_{1,1} & .. & b_{1,p} \\ . & & .. \\ b_{n,1} & .. & b_{n,p} \end{matrix}$$

ein drittes System von Elementen

$$\begin{matrix} c_{1,1} & .. & c_{1,n} \\ . & & .. \\ c_{n,1} & .. & c_{n,n}, \end{matrix}$$

nämlich das k^{te} Element der i^{ten} Horizontalreihe $c_{i,k}$ dadurch, dass man die Elemente der i^{ten} Horizontalreihe im ersten System

$$a_{i,1} \;\; a_{i,2} \;\; .. \;\; a_{i,p}$$

der Reihe nach mit den Elementen der k^{ten} Horizontalreihe im zweiten System

$$b_{k,1} \;\; b_{k,2} \;\; .. \;\; b_{k,p}$$

multiplicirt und die Producte addirt, d. h.

$$c_{i,k} = a_{i,1}\,b_{k,1} + a_{i,2}\,b_{k,2} + .. + a_{i,p}\,b_{k,p}.$$

Die Determinante dieses Systems $\Sigma \pm c_{1,1}\,c_{2,2}\,..\,c_{n,n}$ werde mit R bezeichnet.

Man bilde aus einer beliebigen Combination von n Verticalreihen des ersten Systems die Determinante P und aus P durch Vertauschung von a mit b die Determinante Q, deren Elemente dem zweiten System angehören. Man bilde die Summe aller möglichen Producte PQ, so ist

$$R = \Sigma PQ.$$

Wenn $p = n$, so reducirt sich R auf das eine Product PQ. Wenn $p < n$, so verschwindet R identisch *).

*) Binet und Cauchy (in den gleichzeitigen Abhandlungen J. de l'éc. polyt. Cah. 16 p. 286 und Cah. 17 p. 81, 107) haben diesen Satz durch Betrachtung der besondern Fälle, welche

Beweis. Wenn jedes der n unbestimmten Suffixe $r, s, t, ..$ der Reihe nach die Werthe $1, 2, .., p$ annimmt, so ist nach Voraussetzung das Anfangsglied der Determinante R

$$c_{1,1}\, c_{2,2} \,..\, c_{n,n} = (\sum_r a_{1,r}\, b_{1,r})(\sum_s a_{2,s}\, b_{2,s})(\sum_t a_{3,t}\, b_{3,t}) \,..$$
$$= \sum_{r,s,t,..} a_{1,r}\, a_{2,s}\, a_{3,t} \,..\, b_{1,r}\, b_{2,s}\, b_{3,t} \,.. \,.$$

Daraus entspringen die übrigen Glieder von R, indem die zweiten Suffixe der Elemente c permutirt werden, während die ersten Suffixe unbeweglich bleiben. Bei diesem Verfahren werden aber unter dem Summenzeichen nur die ersten Suffixe der Elemente b permutirt, alle andern Suffixe erleiden keine Veränderung. Daher ist

$$R = \sum_{r,s,t,..} (a_{1,r}\, a_{2,s}\, a_{3,t} \,..\, \Sigma \pm b_{1,r}\, b_{2,s}\, b_{3,t} \,..)$$
$$= \sum_{r,s,t,..} a_{1,r}\, a_{2,s}\, a_{3,t} \,..\, Q\,.$$

Die Determinante Q verschwindet, wenn unter den Suffixen $r, s, t, ..$ zwei gleiche vorkommen (§. 2, 4). Mithin erhält man alle Glieder der zu bildenden Summe, wenn man für $r, s, t, ..$ alle Complexionen von je n verschiedenen Suffixen aus der Reihe $1, 2, .., p$ setzt.

Ist nun $p < n$, so ist $R = 0$. Denn unter den Suffixen $r, s, t, ..,$ deren Werthe aus der Reihe $1, 2, .., p$ zu nehmen sind und deren Anzahl n ist, müssen einige einander gleich sein; folglich ist Q bei jeder möglichen Bestimmung von $r, s, t, ..$ identisch $= 0$.

Ist $p = n$, so können für die Complexion der Suffixe $r, s, t, ..$ nur die verschiedenen Permutationen von $1, 2, .., n$ gesetzt werden, weil bei jeder andern Bestimmung Q identisch verschwinden würde. Durch Permutation der Suffixe $r, s, t, ..$ wird aber Q entweder in Q oder in $-Q$ verwandelt (§. 2, 4), folglich umfasst die mit R bezeichnete Summe alle Glieder der Determinante $\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \,..\, a_{n,n}$ mit dem Factor Q behaftet, d. h.

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} & .. & a_{1,n} \\ . & .. & \\ a_{n,1} & .. & a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & .. & b_{1,n} \\ . & .. & \\ b_{n,1} & .. & b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Ist $p > n$, so können für die Complexion der Suffixe $r, s, t, ..$ zunächst alle Combinationen von je n aus der Reihe $1, 2, ..\, p$ gesetzt werden. Dadurch findet man $\binom{p}{n}$ Glieder der zu bildenden Summe, aus denen die übrigen sich ableiten lassen, indem man für jede Combination $r, s, t, ..$ ihre Permutationen setzt. Nach den im Falle $p = n$ gemachten Bemerkungen bildet jedes der $\binom{p}{n}$ Glieder im Verein mit den aus ihm abgeleiteten Gliedern das Product von zwei Determinanten PQ, also ist

$$R = \Sigma \begin{vmatrix} a_{1,r} & a_{1,s} & a_{1,t} & . \\ a_{2,r} & a_{2,s} & a_{2,t} & . \\ a_{3,r} & a_{3,s} & a_{3,t} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,r} & b_{1,s} & b_{1,t} & . \\ b_{2,r} & b_{2,s} & b_{2,t} & . \\ b_{3,r} & b_{3,s} & b_{3,t} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix},$$

LAGRANGE (Mém. de l'acad. de Berlin 1773 p. 285) und GAUSS (Disquis. arithm. 157. 159. 268, I) gegeben hatten, abgeleitet. Vergl. JACOBI Det. 13 u. 14.

wo für die Complexion $r, s, t, ..$ alle Combinationen von je n aus der Reihe $1, 2, 3, .., p$ zu setzen sind.

Beispiel. Wenn

$$c_{i,k} = a_{i,1}\, b_{k,1} + a_{i,2}\, b_{k,2} + a_{i,3}\, b_{k,3},$$

so ist

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}.$$

2. Wenn insbesondere die Elemente b den mit denselben Suffixen versehenen Elementen a gleich sind, so ist das System der Elemente c symmetrisch, d. h.

$$c_{i,k} = c_{k,i} = a_{i,1}\, a_{k,1} + a_{i,2}\, a_{k,2} + .. + a_{i,p}\, a_{k,p},$$

folglich

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & .. & c_{1,n} \\ . & .. & \\ c_{n,1} & .. & c_{n,n} \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} a_{1,r} & a_{1,s} & a_{1,t} & . \\ a_{2,r} & a_{2,s} & a_{2,t} & . \\ a_{3,r} & a_{3,s} & a_{3,t} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}^2,$$

worin man für die Complexion $r, s, t, ..$ alle Combinationen von je n aus der Reihe $1, 2, .., p$ zu setzen hat, um alle Glieder der Summe zu erhalten.

Solange die Elemente a reell sind, ist die Determinante $\Sigma \pm c_{1,1}\, c_{2,2} .. c_{n,n}$ positiv und kann nur dadurch verschwinden, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,r} & a_{1,s} & a_{1,t} & . \\ a_{2,r} & a_{2,s} & a_{2,t} & . \\ a_{3,r} & a_{3,s} & a_{3,t} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

bei allen Combinationen $r, s, t, ..$ verschwindet*). Der besondere Fall

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & xx_1 + yy_1 + zz_1 & xx_2 + yy_2 + zz_2 \\ x_1x + y_1y + z_1z & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \\ x_2x + y_2y + z_2z & x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1 & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2$$

ist bereits von Lagrange (sur les pyr. 3) gefunden worden.

3. Das Product von zwei Determinanten P und Q n^{ten} Grades ist eine Determinante R desselben Grades, die man auf 4 im Allgemeinen verschiedene Arten darstellen kann**), indem man ihre Elemente entweder aus je einer Horizontalreihe von P und einer Horizontalreihe von Q zusammensetzt, oder aus je einer Horizontalreihe von P und einer Verticalreihe von Q, oder aus je einer Verticalreihe von P und einer Horizontalreihe von Q, oder aus je einer Verticalreihe von P und einer Verticalreihe von Q. Wenn nämlich

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & .. & a_{1,n} \\ . & .. & \\ a_{n,1} & .. & a_{n,n} \end{vmatrix} \qquad Q = \begin{vmatrix} b_{1,1} & .. & b_{1,n} \\ . & .. & \\ b_{n,1} & .. & b_{n,n} \end{vmatrix},$$

---

*) Jacobi l. c. **) Cauchy l. c. p. 83.

so ist nach Lehrsatz 1

$$R = \begin{vmatrix} c_{1,1} & \cdot\cdot & c_{1,n} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ c_{n,1} & \cdot\cdot & c_{n,n} \end{vmatrix} = PQ$$

unter der Voraussetzung, dass

$$c_{i,k} = a_{i,1}\, b_{k,1} + a_{i,2}\, b_{k,2} + \cdot\cdot + a_{i,n}\, b_{k,n}\,.$$

Folglich ist

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ a_{n,1} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdot\cdot & b_{1,n} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ b_{n,1} & \cdot\cdot & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}\, b_{1,1} + \cdot\cdot + a_{1,n}\, b_{1,n} & a_{1,1}\, b_{2,1} + \cdot\cdot + a_{1,n}\, b_{2,n} & \cdot\cdot & a_{1,1}\, b_{n,1} + \cdot\cdot + a_{1,n}\, b_{n,n} \\ a_{2,1}\, b_{1,1} + \cdot\cdot + a_{2,n}\, b_{1,n} & a_{2,1}\, b_{2,1} + \cdot\cdot + a_{2,n}\, b_{2,n} & \cdot\cdot & a_{2,1}\, b_{n,1} + \cdot\cdot + a_{2,n}\, b_{n,n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n,1}\, b_{1,1} + \cdot\cdot + a_{n,n}\, b_{1,n} & a_{n,1}\, b_{2,1} + \cdot\cdot + a_{n,n}\, b_{2,n} & \cdot\cdot & a_{n,1}\, b_{n,1} + \cdot\cdot + a_{n,n}\, b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Nach der hierin enthaltenen Bildungsregel ist ferner

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ a_{n,1} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdot\cdot & b_{n,1} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ b_{1,n} & \cdot\cdot & b_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1}\, b_{1,1} + \cdot\cdot + a_{1,n}\, b_{n,1} & \cdot\cdot & a_{1,1}\, b_{1,n} + \cdot\cdot + a_{1,n}\, b_{n,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}\, b_{1,1} + \cdot\cdot + a_{n,n}\, b_{n,1} & \cdot\cdot & a_{n,1}\, b_{1,n} + \cdot\cdot + a_{n,n}\, b_{n,n} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{n,1} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ a_{1,n} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdot\cdot & b_{1,n} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ b_{n,1} & \cdot\cdot & b_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1}\, b_{1,1} + \cdot\cdot + a_{n,1}\, b_{1,n} & \cdot\cdot & a_{1,1}\, b_{n,1} + \cdot\cdot + a_{n,1}\, b_{n,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n}\, b_{1,1} + \cdot\cdot + a_{n,n}\, b_{1,n} & \cdot\cdot & a_{1,n}\, b_{n,1} + \cdot\cdot + a_{n,n}\, b_{n,n} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{n,1} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ a_{1,n} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdot\cdot & b_{n,1} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ b_{1,n} & \cdot\cdot & b_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1}\, b_{1,1} + \cdot\cdot + a_{1,n}\, b_{1,n} & \cdot\cdot & a_{1,1}\, b_{n,1} + \cdot\cdot + a_{1,n}\, b_{n,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}\, b_{1,1} + \cdot\cdot + a_{n,n}\, b_{1,n} & \cdot\cdot & a_{n,1}\, b_{1,n} + \cdot\cdot + a_{n,n}\, b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Die links stehenden Determinanten, deren Product gebildet wurde, sind von P und Q nicht verschieden (§. 2, 3). Also sind die rechts stehenden Determinanten von R nicht verschieden, d. h.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ a_{n,1} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdot\cdot & b_{1,n} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ b_{n,1} & \cdot\cdot & b_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{1,1} & \cdot\cdot & c_{1,n} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ c_{n,1} & \cdot\cdot & c_{n,n} \end{vmatrix},$$

wenn $c_{i,k}$ eines der Aggregrate

$$\begin{gathered} a_{i,1}\, b_{k,1} + a_{i,2}\, b_{k,2} + \cdot\cdot + a_{i,n}\, b_{k,n}, \\ a_{i,1}\, b_{1,k} + a_{i,2}\, b_{2,k} + \cdot\cdot + a_{i,n}\, b_{n,k}, \\ a_{1,i}\, b_{k,1} + a_{2,i}\, b_{k,2} + \cdot\cdot + a_{n,i}\, b_{k,n}, \\ a_{1,i}\, b_{1,k} + a_{2,i}\, b_{2,k} + \cdot\cdot + a_{n,i}\, b_{n,k} \end{gathered}$$

bedeutet.

4. **Das Product von beliebig vielen Determinanten** ist eine Determinante, deren Grad den höchsten unter den gegebenen Graden nicht übersteigt und deren Elemente ganze rationale Functionen der gegebenen Elemente sind*). Wenn nämlich die Grade der gegebenen Determinanten den n^{ten} Grad nicht übersteigen, so kann man alle Determinanten als solche n^{ten} Grades darstellen und dann nach der Regel (3) die erste mit der zweiten multipliciren, das Product mit der dritten u. s. f.

---

*) Jacobi Det. 13.

Nach §. 2, 6 ist

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & .. & a_{1,m} \\ . & .. & \\ a_{m,1} & .. & a_{m,m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & .. & a_{1,n} \\ . & .. & \\ a_{n,1} & .. & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

wenn von den Elementen $a_{i,k}$ für $i > m$ jedes $= 0$ oder 1 ist, je nachdem $k \lesseqgtr i$; die übrigen nicht gegebenen Elemente bleiben unbestimmt. Daher ist

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & .. & a_{1,m} \\ . & .. & \\ a_{m,1} & .. & a_{m,m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & .. & b_{1,n} \\ . & ... & \\ b_{n,1} & .. & b_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & .. & a_{1,n} \\ . & . & \\ a_{n,1} & .. & a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & .. & b_{1,n} \\ . & .. & \\ b_{n,1} & .. & b_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{1,1} & .. & c_{1,n} \\ . & .. & \\ c_{n,1} & .. & c_{n,n} \end{vmatrix},$$

wenn

$$c_{i,k} = a_{i,1}\, b_{k,1} + a_{i,2}\, b_{k,2} + \,..\, + a_{i,n}\, b_{k,n}\,.$$

Von diesem Aggregat bleiben für $i > m$ nur die Glieder

$$b_{k,i} + a_{i,i+1}\, b_{k,i+1} + \,..\, + a_{i,n}\, b_{k,n}$$

übrig. Wenn die unbestimmten Elemente sämmtlich verschwinden, so erhält man

$$c_{i,k} = a_{i,1}\, b_{k,1} + a_{i,2}\, b_{k,2} + \,..\, + a_{i,m}\, b_{k,m},$$

wovon für $i > m$ nur $b_{k,i}$ übrig bleibt.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p & q \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,p + b\,q & a\,p_1 + b\,q_1 & c & d \\ a_1 p + b_1 q & a_1 p_1 + b_1 q_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 p + b_2 q & a_2 p_1 + b_2 q_1 & c_2 & d_2 \\ a_3 p + b_3 q & a_3 p_1 + b_3 q_1 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

5. **Lehrsatz.** Ist $P = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \,..\, a_{n,n}$, $Q = \Sigma \pm b_{1,1}\, b_{2,2} \,..\, b_{n,n}$,

$$R = \Sigma \pm c_{1,1}\, c_{2,2} \,..\, c_{n,n},$$

und zwar

$$c_{i,k} = a_{i,1}\, b_{k,1} + a_{i,2}\, b_{k,2} + \,..\, + a_{i,n}\, b_{k,n},$$

so dass $PQ = R$ (1); sind ferner $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$, $\gamma_{i,k}$ die Coefficienten von $a_{i,k}$, $b_{i,k}$, $c_{i,k}$ bezüglich in P, Q, R, so ist

$$\gamma_{i,k} = \alpha_{i,1}\, \beta_{k,1} + \alpha_{i,2}\, \beta_{k,2} + \,..\, + \alpha_{i,n}\, \beta_{k,n},$$

und insbesondere, wenn die Elemente $b_{i,k} = a_{i,k}$,

$$\gamma_{i,i} = \alpha_{i,1}^{\,2} + \alpha_{i,2}^{\,2} + \,..\, \alpha_{i,n}^{\,2} \;{}^{*)}.$$

Beweis. Der Coefficient von $a_{i,r}$ in PQ ist nach den gemachten Voraussetzungen $\alpha_{i,r}\, Q$. Weil ferner (§. 3, 1)

$$R = \sum_s c_{i,s}\, \gamma_{i,s}, \quad s = 1, 2, .., n$$

$$= \sum_s (a_{i,1}\, b_{s,1} + a_{i,2}\, b_{s,2} + \,..\, + a_{i,n}\, b_{s,n})\, \gamma_{i,s},$$

so ist $\sum_s b_{s,r}\, \gamma_{i,s}$ der Coefficient von $a_{i,r}$ in R. Nun ist $PQ = R$, folglich

$$\alpha_{i,r}\, Q = \sum_s b_{s,r}\, \gamma_{i,s}$$

$$Q \sum_r \alpha_{i,r}\, \beta_{k,r} = \sum_{r,s} \gamma_{i,s}\, b_{s,r}\, \beta_{k,r} = \sum_s (\gamma_{i,s} \sum_r b_{s,r}\, \beta_{k,r})\,.$$

---

*) Cauchy l. c. p. 90. Vergl. Joachimsthal Crelle J. 40 p. 46. Dieser Satz ist in dem allgemeinen Satze (1) enthalten.

Die Summe $\sum_r b_{s,r}\,\beta_{k,r}$, deren Glieder durch die Werthe $r = 1, 2, .., n$ entstehen, verschwindet, solange s von k verschieden ist, und hat den Werth Q, wenn $s = k$ ist (§. 3, 1). Daher bleibt von der Totalsumme nur das Glied $\gamma_{i,k}\,Q$ übrig, so dass

$$\sum_r \alpha_{i,r}\,\beta_{k,r} = \gamma_{i,k}.$$

Beispiel. Wenn

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & s & t \\ r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \end{vmatrix}$$

vermöge der Gleichungen

$$r = a\,l + b\,m + c\,n$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$t_2 = a_2\,l_2 + b_2\,m_2 + c_2\,n_2;$$

wenn ferner die Coefficienten von $a, b, .., l, m, .., r, s, ..$ in den einzelnen Determinanten mit den entsprechenden griechischen Buchstaben bezeichnet werden, so ist nach dem bewiesenen Lehrsatze

$$\tau_2 = \alpha_2\,\lambda_2 + \beta_2\,\mu_2 + \gamma_2\,\nu_2$$

also

$$\begin{vmatrix} a\,l + b\,m + c\,n & a\,l_1 + b\,m_1 + c\,n_1 \\ a_1 l + b_1 m + c_1 n & a_1 l_1 + b_1 m_1 + c_1 n_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m & n \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n & l \\ n_1 & l_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l & m \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}.$$

In dem besondern Falle, dass das zweite System mit dem ersten übereinstimmt, erhält man die häufig angewandte Identität*)

$$(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2) - (aa_1+bb_1+cc_1)^2 = (b\,c_1 - b_1\,c)^2 + (c\,a_1 - c_1\,a)^2 + (a\,b_1 - a_1\,b)^2.$$

§. 7. Determinanten von adjungirten Systemen.

1. Wenn $\alpha_{i,k}$ den Coefficienten von $a_{i,k}$ in der Determinante

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} & .. & a_{1,n} \\ .. & & .. \\ a_{n,1} & .. & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

bedeutet, so heisst das System der Elemente

$$\begin{matrix} \alpha_{1,1} & .. & \alpha_{1,n} \\ . & & .. \\ \alpha_{n,1} & .. & \alpha_{n,n} \end{matrix}$$

dem System der Elemente a adjungirt**).

Lehrsatz. Die Determinante des Systems von Elementen, welches einem gegebenen System von n^2 Elementen adjungirt ist, ist die $(n-1)^{\text{te}}$ Potenz der Determinante des gegebenen Systems***).

---

*) Cauchy Anal. algébr. Note II (84).

**) Cauchy l. c. p. 64 hat diese Benennung aus der Theorie der quadratischen Formen (Gauss disquis. arithm. 267) entnommen.

***) Cauchy l. c. p. 82. Den Fall $n = 3$ findet man bei Lagrange sur les pyr. 5 und bei Gauss l. c.

Beweis. Wenn man

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \cdot\cdot & \alpha_{1,n} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ \alpha_{n,1} & \cdot\cdot & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

mit R multiplicirt, so erhält man (§. 6, 3)

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & \cdot\cdot & c_{1,n} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ c_{n,1} & \cdot\cdot & c_{n,n} \end{vmatrix},$$

worin

$$c_{i,k} = \alpha_{i,1}\, a_{k,1} + \alpha_{i,2}\, a_{k,2} + \cdot\cdot\ \alpha_{i,n}\, a_{k,n}.$$

Diese Elemente haben den Werth R oder 0, je nachdem k und i gleich oder verschieden sind (§. 3, 1). Also reducirt sich ihre Determinante auf das Anfangsglied $c_{1,1}\, c_{2,2} \cdot\cdot\, c_{n,n} = R^n$ (§. 2, 7). Daher ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \cdot\cdot & \alpha_{1,n} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ \alpha_{n,1} & \cdot\cdot & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} R = R^n,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \cdot\cdot & \alpha_{1,n} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ \alpha_{n,1} & \cdot\cdot & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ a_{n,1} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix}^{n-1}.$$

2. **Lehrsatz.** Eine partielle Determinante des adjungirten Systems vom m^{ten} Grade ist das Product von R^{m-1} mit dem Coefficienten, welchen die entsprechende partielle Determinante des ursprünglichen Systems in R hat*).

Beweis. Wenn

$$\begin{matrix} f, g, \ldots, r, s, \ldots \\ i, k, \ldots, u, v, \ldots \end{matrix}$$

gegebene Permutationen von $1, 2, .., n$ sind und darin $f, g, ..$ und $i, k, ..$ Gruppen von m Suffixen bedeuten, während die übrigen $n-m$ Suffixe durch $r, s, ..$ und $u, v, ..$ bezeichnet werden, so ist die Determinante m^{ten} Grades

$$\begin{vmatrix} \alpha_{f,i} & \alpha_{f,k} & \cdot \\ \alpha_{g,i} & \alpha_{g,k} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix},$$

eine partielle Determinante des adjungirten Systems (§. 4, 3). Unter den gemachten Voraussetzungen ist aber

$$\begin{vmatrix} a_{f,i} & a_{f,k} & \cdot\cdot & a_{f,u} & a_{f,v} & \cdot \\ a_{g,i} & a_{g,k} & \cdot\cdot & a_{g,u} & a_{g,v} & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ a_{r,i} & a_{r,k} & \cdot\cdot & a_{r,u} & a_{r,v} & \cdot \\ a_{s,i} & a_{s,k} & \cdot\cdot & a_{s,u} & a_{s,v} & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = \varepsilon R,$$

wo ε den Werth 1 oder -1 hat, je nachdem die gegebenen Permutationen in eine Classe gehören oder nicht (§. 2, 4). Die gesuchte partielle Determinante des adjungirten Systems kann, um mit εR multiplicirt zu werden, die Form erhalten (§. 6, 4)

---

*) Jacobi Det. 11. Die zum Beweis dienende Multiplication der gesuchten Determinante mit R ist von Borchardt angegeben worden.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{f,i} & \alpha_{f,k} & \cdot\cdot & \alpha_{f,u} & \alpha_{f,v} & \cdot \\ \alpha_{g,i} & \alpha_{g,k} & \cdot\cdot & \alpha_{g,u} & \alpha_{g,v} & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \\ b_{r,i} & b_{r,k} & \cdot\cdot & b_{r,u} & b_{r,v} & \cdot \\ b_{s,i} & b_{s,k} & \cdot\cdot & b_{s,u} & b_{s,v} & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \end{vmatrix},$$

worin die Elemente b den Werth 1 oder 0 haben, je nachdem sie in der Diagonalreihe oder ausser derselben stehen. Das Product beider Determinanten ist die Determinante eines Systems von Elementen c, unter denen $c_{1,1}, c_{2,2}, .., c_{m,m}$ den Werth R haben, während die übrigen Elemente der ersten m Horizontalreihen verschwinden (§. 3, 1). Die $(m+1)^{te}$, $(m+2)^{te}$,.. Horizontalreihe gleicht der $(m+1)^{ten}$, $(m+2)^{ten}$,.. Verticalreihe in εR. Diese Determinante reducirt sich aber auf das Product von zwei Determinanten (§. 4, 2), deren erste den Werth R^m hat (§. 2, 7); die zweite ist

$$\begin{vmatrix} a_{r,u} & a_{s,u} & \cdot \\ a_{r,v} & a_{s,v} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{r,u} & a_{r,v} & \cdot \\ a_{s,u} & a_{s,v} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix} \quad (§. 2, 3).$$

Daher ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{f,i} & \alpha_{f,k} & \cdot \\ \alpha_{g,i} & \alpha_{g,k} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = R^{m-1}\varepsilon \begin{vmatrix} a_{r,u} & a_{r,v} & \cdot \\ a_{s,u} & a_{s,v} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}.$$

Nach §. 4, 3 bedeutet

$$\varepsilon \begin{vmatrix} a_{r,u} & a_{r,v} & \cdot \\ a_{s,u} & a_{s,v} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

den Coefficienten, mit welchem in R die partielle Determinante des gegebenen Systems

$$\begin{vmatrix} a_{f,i} & a_{f,k} & \cdot \\ a_{g,i} & a_{g,k} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

versehen ist, deren Elemente mit denen der gesuchten Determinante in Hinsicht der Suffixe übereinstimmen.

Beispiele. Wenn $R = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \,..\, a_{n,n}$, so ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{k+1,k+1} & \cdot\cdot & \alpha_{k+1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \\ \alpha_{n,k+1} & \cdot\cdot & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = R^{n-k-1} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,k} \\ \cdot & \cdot\cdot & \\ a_{k,1} & \cdot\cdot & a_{k,k} \end{vmatrix} \text{*)}.$$

Ebenso ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \cdot\cdot & \alpha_{1,m} \\ \cdot & \cdot\cdot & \\ \alpha_{m,1} & \cdot\cdot & \alpha_{m,m} \end{vmatrix} = R^{m-1} \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdot\cdot & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \\ a_{n,m+1} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Wenn insbesondere $n = 5$ ist, so ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{41} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \\ \alpha_{51} & \alpha_{53} & \alpha_{54} \end{vmatrix} = -R^2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{15} \\ a_{32} & a_{35} \end{vmatrix},$$

weil die Permutationen

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{matrix}$$

nicht in eine Classe gehören.

---

*) Jacobi l. c.

Dagegen ist
$$\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{23}\\ \alpha_{41} & \alpha_{43}\end{vmatrix} = R\begin{vmatrix}a_{12} & a_{14} & a_{15}\\ a_{32} & a_{34} & a_{35}\\ a_{52} & a_{54} & a_{55}\end{vmatrix},$$
weil
$$\begin{matrix}2 & 4 & 1 & 3 & 5\\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5\end{matrix}$$
Permutationen derselben Classe sind.

3. Der Coefficient des Elements $\alpha_{i,k}$ in der Determinante der adjungirten Elemente $\Sigma \pm \alpha_{1,1}\, \alpha_{2,2} \ldots \alpha_{n,n}$ ist
$$R^{n-2}\, a_{i,k}\,.$$
Denn dieser Coefficient ist eine partielle Determinante des adjungirten Systems vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade und der Coefficient, welchen die entsprechende partielle Determinante des ursprünglichen Systems in R hat, ist $a_{i,k}$, wie unmittelbar einleuchtet. Wenn insbesondere $n = 3$, so ist
$$\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix} = Ra_{33}, \quad \begin{vmatrix}\alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{22} & \alpha_{23}\end{vmatrix} = Ra_{31} \text{ u. s. w. *)}.$$

4. Um überhaupt eine partielle Determinante zweiten Grades im adjungirten System zu berechnen, z. B.
$$\begin{vmatrix}\alpha_{f,i} & \alpha_{f,k}\\ \alpha_{g,i} & \alpha_{g,k}\end{vmatrix},$$
bedarf man des Coefficienten, welchen die entsprechende Determinante
$$\begin{vmatrix}a_{f,i} & a_{f,k}\\ a_{g,i} & a_{g,k}\end{vmatrix}$$
in R hat. Dieser Coefficient stimmt mit demjenigen überein, welchen das Product $a_{f,i}\, a_{g,k}$ in R hat (§. 4, 3). Folglich ist
$$\begin{vmatrix}\alpha_{f,i} & \alpha_{f,k}\\ \alpha_{g,i} & \alpha_{g,k}\end{vmatrix} = R\frac{\partial^2 R}{\partial a_{f,i}\, \partial a_{g,k}} \text{ **)}.$$
Ebenso ist
$$\begin{vmatrix}\alpha_{f,i} & \alpha_{f,k} & \alpha_{f,l}\\ \alpha_{g,i} & \alpha_{g,k} & \alpha_{g,l}\\ \alpha_{h,i} & \alpha_{h,k} & \alpha_{h,l}\end{vmatrix} = R^2\frac{\partial^3 R}{\partial a_{f,i}\, \partial a_{g,k}\, \partial a_{h,l}} \text{ u. s. f.}$$
Diese Identitäten geben zugleich an, wie man zweite, dritte, .. partielle Differentialquotienten einer Determinante durch erste partielle Differentialquotienten derselben ausdrücken könne.

5. Wenn R identisch verschwindet, so verschwinden auch identisch die partiellen Determinanten des adjungirten Systems vom 2ten, 3ten,.. Grade, weil sie den Factor R enthalten (2). Aus der Identität
$$\begin{vmatrix}\alpha_{f,i} & \alpha_{f,k}\\ \alpha_{g,i} & \alpha_{g,k}\end{vmatrix} = 0$$
folgen die Proportionen
$$\alpha_{f,i} : \alpha_{f,k} = \alpha_{g,i} : \alpha_{g,k}, \quad \alpha_{f,i} : \alpha_{g,i} = \alpha_{f,k} : \alpha_{g,k},$$
$$\alpha_{f,1} : \alpha_{f,2} : \alpha_{f,3} : \ldots = \alpha_{g,1} : \alpha_{g,2} : \alpha_{g,3} : \ldots$$
$$\alpha_{1,i} : \alpha_{2,i} : \alpha_{3,i} : \ldots = \alpha_{1,k} : \alpha_{2,k} : \alpha_{3,k} : \ldots \text{ ***)}.$$

*) LAGRANGE sur les pyr. 3. **) JACOBI Det. 10. ***) JACOBI Crelle J. 15 p 101 und anderwärts.

Wenn insbesondere die Elemente des gegebenen Systems so beschaffen sind, dass $\alpha_{k,i} = \pm \alpha_{i,k}$, so ist unter Voraussetzung der Identität $R = 0$ auch

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i,i} & \alpha_{i,k} \\ \pm \alpha_{i,k} & \alpha_{k,k} \end{vmatrix} = 0,$$

folglich

$$\alpha_{i,k} = \sqrt{\pm \alpha_{i,i}\, \alpha_{k,k}}\,.$$

Hieraus ergiebt sich die Proportion

$$\alpha_{i,1} : \alpha_{i,2} : \alpha_{i,3} : \ldots = \sqrt{\alpha_{1,1}} : \sqrt{\alpha_{2,2}} : \sqrt{\alpha_{3,3}} : \ldots,$$

welche einerseits anzeigt, dass die Verhältnisse $\alpha_{i,1} : \alpha_{i,2} : \alpha_{i,3} : \ldots$ von i unabhängig sind, und andererseits, dass durch das Zeichen einer unter diesen Wurzeln die Zeichen der übrigen Wurzeln bestimmt sind.

§. 8. Determinante eines Systems von Elementen, unter denen die correspondirenden $a_{i,k}$ und $a_{k,i}$ entgegengesetzt gleich sind *).

1. **Lehrsatz.** Die Determinante geraden Grades

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

deren Elemente so beschaffen sind, dass

$$a_{k,i} = -a_{i,k}, \quad a_{i,i} = 0,$$

ist das Quadrat einer ganzen rationalen Function der Elemente **).

Beweis. Wenn R' den Coefficienten von $a_{1,1}$ in R, $\alpha_{i,k}$ den Coefficienten von $a_{i,k}$ in R' bedeutet, so ist (§. 5, 2)

$$R = a_{1,1} R' - \sum_{i,k} a_{i,1}\, a_{1,k}\, \alpha_{i,k},$$

worin i und k die Werthe $2, 3, \ldots, n$ erhalten. Zufolge der über die Elemente gemachten Voraussetzungen ist aber identisch

$$R' = 0 \ (\text{§. } 3, 9), \quad \alpha_{i,k} = \alpha_{k,i} = \sqrt{\alpha_{i,i}\, \alpha_{k,k}} \ (\text{§. } 7, 5),$$

folglich

$$R = \sum_{i,k} a_{1,i}\, a_{1,k} \sqrt{\alpha_{i,i}\, \alpha_{k,k}}$$

$$= (\sum_i a_{1,i} \sqrt{\alpha_{i,i}})(\sum_k a_{1,k} \sqrt{\alpha_{k,k}})\,.$$

Da durch das Zeichen einer Wurzel die Zeichen der übrigen bestimmt sind (§. 7, 5), so unterscheidet sich die zweite Summe nicht von der ersten und man erhält

$$R = (\sum_i a_{1,i} \sqrt{\alpha_{i,i}})^2,$$

---

*) Ein solches System und seine Determinante wird nach Cayley (Crelle J. 32 p. 119, 38 p. 93, 50 p. 299) gauche (skew, gobbo) genannt.

**) Cayley Crelle J. 38 p. 95. Der daselbst gegebene Beweis lässt mehrfache Bedenken unerledigt.

also
$$\sqrt{R} = \sum_i a_{1,i} \sqrt{\alpha_{i,i}},$$
ein Aggregat von $n-1$ Gliedern. Nun ist $\alpha_{i,i}$ eine Determinante $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades, worin die Reihe der ersten Suffixe mit der Reihe der zweiten Suffixe übereinstimmt und aus der Reihe $2, 3, .., n$ mit Ausschluss von i gebildet wird. Nach der für die Zerlegung von $\sqrt{R}$ gefundenen Regel lässt sich $\sqrt{\alpha_{i,i}}$ in $n-3$ Glieder zerlegen, von denen jedes das Product eines Elements mit der Wurzel aus einer ähnlichen Determinante $(n-4)^{\text{ten}}$ Grades ist u. s. f. Die Wurzel aber aus einer ähnlichen Determinante 2ten Grades
$$\begin{vmatrix} a_{u,u} & a_{u,v} \\ a_{v,u} & a_{v,v} \end{vmatrix}$$
ist rational, nämlich $a_{u,v}$ oder $a_{v,u}$. Demnach erscheint $\sqrt{R}$ als ein positiv oder negativ zu nehmendes Aggregat von
$$(n-1)(n-3)\,..\,3\,.\,1 = \frac{1\,.\,2\,...\,n}{1\,.\,2\,...\,\frac{n}{2}\,.\,2^{\frac{n}{2}}}$$
Gliedern; jedes derselben ist ein Product von $\frac{n}{2}$ Elementen, deren Suffixe durchaus verschieden von einander sind, so dass die Gesammtheit der ersten und zweiten Suffixe eine Permutation von $1, 2, .., n$ bildet.

Als Anfangsglied dieses Aggregats findet man
$$\pm\, a_{1,2}\, a_{3,4} \,..\, a_{n-1,n},$$
indem man der Reihe nach
$$\begin{aligned} \sqrt{R} &= a_{1,2}\, A + .. \\ A &= a_{3,4}\, B + .. \\ B &= a_{5,6}\, C + .. \\ &\;\;\;... \end{aligned}$$
nach der obigen Regel entwickelt. In der That ist
$$(a_{1,2}\, a_{3,4} \,..\, a_{n-1,n})^2 = (-1)^{\frac{n}{2}}\, a_{1,2}\, a_{2,1}\, a_{3,4}\, a_{4,3} \,..\, a_{n-1,n}\, a_{n,n-1}$$
ein positives Glied der Determinante R, weil die Permutationen
$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & .. & (n-1) & n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & .. & n & (n-1) \end{matrix}$$
einer Classe angehören oder nicht, je nachdem $\frac{n}{2}$ gerade oder ungerade.

2. Lehrsatz. Die Formel
$$S = a_{1,2}\, a_{3,4} \,..\, a_{n-1,n} + \cdots,$$
deren Quadrat der vorhin betrachteten Determinante R gleich ist, erhält den entgegengesetzten Werth, wenn zwei Suffixe vertauscht werden, und verschwindet identisch, wenn zwei Suffixe einander gleich sind*).

Beweis. Wenn S_1 die Formel bedeutet, welche aus S durch Vertauschung der Suffixe i und k entspringt, so ist S_1^2 die Determinante, welche aus R durch

*) Die Formel S ist von Jacobi (Crelle J. 2 p. 354, 29 p. 236) zum Gebrauch beim Pfaff'schen Integrationsproblem construirt und neuerlich von Cayley (l. c.) mit dem Namen Pfaffian belegt worden. Die Eigenschaften derselben hat Jacobi ohne Beweis und ohne die fundamentale Relation $S^2 = R$ mitgetheilt.

Vertauschung derselben Suffixe hervorgeht. Nun kommen i und k in R sowohl unter den ersten, als auch unter den zweiten Suffixen vor, also wird R durch diese Vertauschung nicht verändert (§. 2, 4), d. h. $S_1^2 = S^2$. Zufolge dieser Identität sind die Glieder von S_1 den Gliedern von S der Reihe nach gleich und zwar von gleichen oder von entgegengesetzten Zeichen, je nachdem ein Glied von S_1 und das gleiche von S gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben. Bedeutet nun $a_{i,k} B$ das Aggregat der Glieder von S, worin das Element $a_{i,k}$ vorkommt, so enthält B nur solche Elemente, deren Suffixe von i und k verschieden sind (1), folglich geht $a_{i,k} B$ durch Vertauschung von i und k in $a_{k,i} B$ über. Die Glieder $a_{i,k} B$ in S und $a_{k,i} B$ in S_1 sind entgegengesetzt gleich, weil $a_{k,i} = -a_{i,k}$, folglich sind auch S und S_1 entgegengesetzt gleich.

Wenn die Suffixe i und k gleich sind, so ist S_1 nicht nur $-S$, sondern auch S identisch gleich, d. h. S verschwindet identisch.

3. Die Formel, deren Quadrat eine Determinante der hier betrachteten Art ist, wird nach Jacobi durch die Reihe der Suffixe von den Elementen ihres Anfangsgliedes, mit welcher die Reihen der ersten und der zweiten Suffixe von den Elementen der Determinante übereinstimmen, unzweideutig bezeichnet. Das Symbol

$$(1, 2, 3, .., n)$$

bedeutet demnach das mit dem Anfangsgliede $a_{1,2}\, a_{3,4} \,..\, a_{n-1,n}$ beginnende Aggregat, dessen Quadrat die Determinante

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} & .. & a_{1,n} \\ . & & . \\ a_{n,1} & .. & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

unter der beständigen Voraussetzung, dass $a_{k,i} = -a_{i,k}$, $a_{i,i} = 0$, n gerade ist. In Folge des vorigen Lehrsatzes ist

$$(1, 2, 3, .., n) = (3, 4, 1, 2, .., n) = -(2, 3, .., n, 1) = -(2, 1, 3, .., n)$$

u. s. f. Man kann daher für $\sqrt{R}$ im Allgemeinen sowohl

$$(1, 2, 3, .., n),$$

als auch

$$(2, 1, 3, .., n),$$

wie auch jede andere Permutation dieser Suffixe setzen, weil diese verschiedenen Symbole entweder gleich oder entgegengesetzt gleich sind.

Ebenso kann man $\sqrt{\alpha_{i,i}}$ (1) durch irgend eine Permutation der Suffixe $2, 3, .., n$ mit Weglassung von i bezeichnen, so lange man diese Formel für sich betrachtet. Damit jedoch auch dem Zeichen nach

$$\sqrt{\alpha_{i,i}}\,\sqrt{\alpha_{k,k}} = \alpha_{i,k}$$

und folglich

$$\sqrt{R} = \sum_i a_{1,i}\,\sqrt{\alpha_{i,i}}$$

werde, müssen die Glieder der Summe bestimmte Zeichen erhalten, so dass nur das Zeichen der Summe unbestimmt bleibt.

4. **Lehrsatz.** Zur successiven Entwickelung von $(1,2,..,n)$ dient die Identität

$$(1,2,3,..,n) = a_{1,2}\,(3,4,..,n) + a_{1,3}\,(4,..,n,2) + ..$$
$$+ a_{1,i}\,(i+1,..,n,2,..,i-1) + .. + a_{1,n}\,(2,3,..,n-1),$$

worin die Reihe der eingeschlossenen Suffixe aus $2, 3, .., n$ durch cyclische Vertauschungen und Weglassung des jedesmal letzten Suffixes gebildet ist*).

Beweis. Setzt man (3)

$$\sqrt{\alpha_{i,i}} = (-1)^i (2, 3, .., i-1, i+1, .., n)$$

und analog

$$\sqrt{\alpha_{k,k}} = (-1)^k (2, 3, .., k-1, k+1, .., n),$$

so hat das Product

$$(-1)^{i+k} (2, 3, .., i-1, i+1, .., n)(2, 3, .., k-1, k+1, .., n)$$

entweder den Werth $\alpha_{i,k}$ oder den Werth $-\alpha_{i,k}$, weil sein Quadrat $\alpha_{i,i}\,\alpha_{k,k} = \alpha_{i,k}^2$ ist. Für das obige Product kann nach (3)

$$-(-1)^{i+k} (2, 3, i-1, i+1, .., n)(3, .., k-1, k+1, .., n, 2)$$

gesetzt werden. Dagegen hat man (§. 3, 5 und §. 2, 4)

$$\alpha_{i,k} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{2,2} & .. & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & .. & a_{2,n} \\ . & .. & & & & \\ a_{i-1,2} & .. & & & & \\ a_{i+1,2} & .. & & & & \\ . & .. & & & & \\ a_{n,2} & .. & & & & \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{2,3} & .. & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & .. & a_{2,n} & a_{2,2} \\ . & .. & & & & & \\ a_{i-1,3} & .. & & & & & \\ a_{i+1,3} & .. & & & & & \\ . & .. & & & & & \\ a_{n,3} & .. & & & & & \end{vmatrix}.$$

Das Anfangsglied dieser letzteren Determinante und das Anfangsglied des Products $(2, .., i-1, i+1, .., n)(3, .., k-1, k+1, .., n, 2)$ sind aber von einander nur durch die Ordnung der zu multiplicirenden Elemente verschieden, wie die Anschauung unmittelbar zu erkennen giebt. Daher müssen alle Glieder von $\alpha_{i,k}$ den Gliedern von

$$(-1)^{i+k} (2, 3, .., i-1, i+1, .., n)(2, 3, .., k-1, k+1, .., n)$$

der Reihe nach gleich und mit ihnen von einerlei Zeichen sein, damit die Identität $\alpha_{i,k}^2 = \alpha_{i,i}\,\alpha_{k,k}$ stattfinde, d. h. es ist

$$\sqrt{\alpha_{i,i}}\ \sqrt{\alpha_{k,k}} = \alpha_{i,k},$$

wenn

$$\sqrt{\alpha_{i,i}} = (-1)^i (2, 3, .., i-1, i+1, .., n),$$

oder nach $i-2$ cyclischen Vertauschungen der Suffixe (3)

$$\sqrt{\alpha_{i,i}} = (i+1, .., n, 2, .., i-1)$$

gesetzt wird. Durch diese Substitution erhält man (1)

$$\sum_i a_{1,i} \sqrt{\alpha_{i,i}} = a_{1,2}(3, .., n) + a_{1,3}(4, .., n, 2) + .. + a_{1,n}(2, .., n-1)$$

als einen Werth von $\sqrt{R}$, der durch

$$(1, 2, .., n)$$

*) Jacobi und Cayley (l. c.) gebrauchen diese Identität als Definition von $(1, 2, .., n)$.

zu bezeichnen ist, wie man aus der Uebereinstimmung der Anfangsglieder von $a_{1,2}\,(3,..,n)$ und $(1,2,3,..,n)$ wahrnimmt.

Beispiele:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{14} \\ . & .. & \\ a_{41} & .. & a_{44} \end{vmatrix} = (1,2,3,4)^2 = (a_{12}\,a_{34} + a_{13}\,a_{42} + a_{14}\,a_{23})^2.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{16} \\ . & .. & \\ a_{61} & .. & a_{66} \end{vmatrix} = (1,2,..,6)^2 = [a_{12}\,(3,4,5,6) + a_{13}\,(4,5,6,2) + .. + a_{16}\,(2,3,4,5)]^2$$

$$\begin{aligned} = (&a_{12}\,a_{34}\,a_{56} + a_{12}\,a_{35}\,a_{64} + a_{12}\,a_{36}\,a_{45} \\ &+ a_{13}\,a_{45}\,a_{62} + a_{13}\,a_{46}\,a_{25} + a_{13}\,a_{42}\,a_{56} \\ &+ a_{14}\,a_{56}\,a_{23} + a_{14}\,a_{52}\,a_{36} + a_{14}\,a_{53}\,a_{62} \\ &+ a_{15}\,a_{62}\,a_{34} + a_{15}\,a_{63}\,a_{42} + a_{15}\,a_{64}\,a_{23} \\ &+ a_{16}\,a_{23}\,a_{45} + a_{16}\,a_{24}\,a_{53} + a_{16}\,a_{25}\,a_{34}\,)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & f & e \\ -b & -f & 0 & d \\ -c & -e & -d & 0 \end{vmatrix} = (ad - be + cf)^2.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & -b & c \\ -a & 0 & f & e \\ b & -f & 0 & d \\ -c & -e & -d & 0 \end{vmatrix} = (ad + be + cf)^2.$$

5. Der Coefficient von $a_{i,k}$ in der hier betrachteten Determinante R ist (§. 3, 9)

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial R}{\partial a_{i,k}} = \sqrt{R}\,\frac{\partial \sqrt{R}}{\partial a_{i,k}}.$$

Der Coefficient von $a_{i,i}$ in R, der im Allgemeinen durch $\frac{\partial R}{\partial a_{i,i}}$ ausgedrückt wird, verschwindet in diesem Falle (§. 3, 9). Ordnet man nun R in Bezug auf die Elemente einer Horizontalreihe, so erhält man (§. 3, 1) nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors $\sqrt{R}$

$$\sqrt{R} = a_{i,1}\,\frac{\partial \sqrt{R}}{\partial a_{i,1}} + .. + a_{i,n}\,\frac{\partial \sqrt{R}}{\partial a_{i,n}},$$

$$0 = a_{i,1}\,\frac{\partial \sqrt{R}}{\partial a_{k,1}} + .. + a_{i,n}\,\frac{\partial \sqrt{R}}{\partial a_{k,n}} \text{ *)},$$

worin $\frac{\partial \sqrt{R}}{\partial a_{i,i}} = 0$ zu setzen ist.

Setzt man (3)

$$\begin{aligned} \sqrt{R} &= (i, 1, 2, .., i-1, i+1, .., n) \\ &= a_{i,1}\,(2, .., n) + a_{i,2}\,(3, .., n, 1) + .., \end{aligned}$$

so findet man

$$\frac{\partial \sqrt{R}}{\partial a_{i,k}} = (k+1, .., n, 1, .., k-1),$$

in welchem Cyclus die Suffixe i und k fehlen.

6. **Lehrsatz.** Bedeutet D den Werth, welchen die Determinante R der beliebigen Elemente $a_{1,1} .. a_{n,n}$ annimmt, wenn die Elemente

$$a_{1,1},\ a_{2,2},\ ..,\ a_{n,n}$$

verschwinden; bedeutet ferner

*) Jacobi l. c.

D_i den Werth, welchen D annimmt, wenn die Horizontal- und Verticalreihen fehlen, in denen das Element $a_{i,i}$ steht;

$D_{i,k}$ den Werth, welchen D annimmt, wenn die Reihen fehlen, in denen die Elemente $a_{i,i}$ und $a_{k,k}$ vorkommen; u. s. f., so ist

$$R = D + \Sigma a_{i,i} D_i + \Sigma a_{i,i} a_{k,k} D_{i,k} + \Sigma a_{i,i} a_{k,k} a_{l,l} D_{i,k,l} + \ldots + a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n},$$

worin für i alle Werthe $1, 2, \ldots, n$, für i,k alle Binionen derselben, für i,k,l alle Ternionen derselben u. s. f. zu setzen sind *).

Beweis. Die Glieder von R, welche keines der Elemente $a_{1,1}\, a_{2,2}, \ldots$ enthalten, stimmen mit den Gliedern von D überein. Die Glieder von R, welche je eines der genannten Elemente enthalten, stimmen mit den Gliedern der Summe

$$a_{1,1} D_1 + a_{2,2} D_2 + \ldots + a_{n,n} D_n$$

überein. Denn aus dem Coefficienten von $a_{i,i}$ in R entspringt D_i (§. 3, 5), indem die Elemente $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$ verschwinden. Ebenso stimmen die Glieder von R, welche je zwei der genannten Elemente enthalten, mit den Gliedern der Summe

$$\begin{array}{l} a_{1,1} a_{2,2} D_{1,2} + a_{1,1} a_{3,3} D_{1,3} + \ldots \\ \qquad + a_{2,2} a_{3,3} D_{2,3} + \ldots \\ \qquad \ldots \end{array}$$

überein u. s. f. Keines unter allen Gliedern von R wird hierbei übergangen, keines wiederholt.

7. Sind die Elemente der Determinante R so beschaffen, dass

$$a_{i,k} = -a_{k,i}, \quad a_{1,1} = a_{2,2} = \ldots = a_{n,n} = z,$$

so ist (6)

$$R = z^n + z^{n-2} \Sigma D_2 + z^{n-4} \Sigma D_4 + \ldots \text{ **}),$$

worin

$$D_m = \begin{vmatrix} a_{i,i} & a_{i,k} & \cdot \\ a_{k,i} & a_{k,k} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

eine partielle Determinante m^{ten} Grades ist, deren Elemente den Bedingungen

$$a_{r,s} = -a_{s,r}, \quad a_{r,r} = 0$$

unterliegen und ΣD_m die Summe der Determinanten bedeutet, welche aus D_m entspringen, indem für die Suffixe $i, k, \ldots$ alle Combinationen von je m aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ gesetzt werden. Für ungerade m verschwindet D_m (§. 3, 9), für gerade m ist (3)

$$D_m = (i, k, \ldots)^2,$$

also ΣD_m die Summe von $\binom{n}{m}$ Quadraten.

Beispiele:

$$\begin{vmatrix} z & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & z & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & z \end{vmatrix} = z^3 + z\,(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2),$$

$$\begin{vmatrix} z & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & z & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & z & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & z \end{vmatrix} = z^4 + z^2 (a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2) + (a_{12} a_{34} + a_{13} a_{42} + a_{14} a_{23})^2.$$

---

*) Cayley Crelle J. 38 p. 93. **) Cayley l. c. Vergl. Crelle J. 50 p. 299.

Zweiter Abschnitt.

Anwendungen der Determinanten.

---

§. 9. Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen.

1. **Lehrsatz.** Wenn die n Unbekannten $x_1, x_2, .., x_n$ durch die n linearen Gleichungen

$$a_{1,1}\, x_1 + a_{1,2}\, x_2 + \ldots + a_{1,n}\, x_n = u_1$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_{n,1}\, x_1 + a_{n,2}\, x_2 + \ldots + a_{n,n}\, x_n = u_n$$

gegeben sind; wenn

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

und $\alpha_{i,k}$ den Coefficienten von $a_{i,k}$ in R bedeutet, so ist

$$R x_k = u_1\, \alpha_{1,k} + u_2\, \alpha_{2,k} + \ldots + u_n\, \alpha_{n,k}\ ^{*)}.$$

Diese Formel entspringt aus R, wenn man $u_1, u_2, .., u_n$ an die Stelle von $a_{1,k}$, $a_{2,k}, .., a_{n,k}$ setzt. Die Determinante der Coefficienten von den Unbekannten wird die Determinante des Systems der linearen Gleichungen genannt **).

Beweis. Wenn man die gegebenen Gleichungen der Reihe nach mit

$$\alpha_{1,k},\ \alpha_{2,k},\ \ldots,\ \alpha_{n,k}$$

multiplicirt und die erhaltenen Gleichungen addirt, so erhält x_k den Coefficienten

$$a_{1,k}\, \alpha_{1,k} + a_{2,k}\, \alpha_{2,k} + \ldots + a_{n,k}\, \alpha_{n,k} = R,$$

dagegen x_i den Coefficienten

$$a_{1,i}\, \alpha_{1,k} + a_{2,i}\, \alpha_{2,k} + \ldots + a_{n,i}\, \alpha_{n,k} = 0 \quad (§. 3, 1).$$

---

*) Diese Auflösung wurde zuerst von Leibniz angegeben und von Cramer neu erfunden (vergl. §. 1 u. §. 2).

**) Jacobi Det. 7.

2. Wenn die Determinante des linearen Systems verschwindet, so erhalten die Unbekannten im Allgemeinen unendliche Werthe, d. h. die gegebenen Gleichungen sind unvereinbar, mithin nicht unabhängig von einander. Der Widerspruch zwischen den gegebenen Gleichungen wird durch Hinzutritt der Bedingung abgeschnitten:

$$u_1\,\alpha_{1,k}+u_2\,\alpha_{2,k}+\,..\,+u_n\,\alpha_{n,k}=0,$$

welche für jedes k gilt, weil die Verhältnisse $\alpha_{1,k}:\alpha_{2,k}:..$ von k unabhängig sind (§. 7, 5). Dann erscheinen die Unbekannten als Quotienten $\frac{0}{0}$, deren Werthe sich in jedem gegebenen Falle durch $n-1$ der gegebenen Gleichungen weiter analysiren lassen.

3. Wenn die Grössen $u_1, u_2,.., u_n$ verschwinden, so verschwinden im Allgemeinen auch die Unbekannten, d. h. die gegebenen Gleichungen sind unvereinbar, mithin nicht unabhängig von einander. Der Widerspruch zwischen den gegebenen Gleichungen wird in diesem Falle durch die Bedingung abgeschnitten, dass die Determinante R des linearen Systems verschwinde. Die Gleichung

$$R=0$$

wird die Resultante der linearen Gleichungen $u_1=0, u_2=0,.., u_n=0$ genannt*). Ist die Bedingung $R=0$ erfüllt, so genügt den gegebenen Gleichungen die Proportion

$$x_1:x_2:x_3:\,..\,=\alpha_{i,1}:\alpha_{i,2}:\alpha_{i,3}:\,..\ ^{**}),$$

worin i ein beliebiges Suffix bedeutet (§. 7, 5). Denn vermöge der Gleichung

$$a_{k,1}\,\alpha_{i,1}+a_{k,2}\,\alpha_{i,2}+\,..\,+a_{k,n}\,\alpha_{i,n}=0,$$

welche nicht nur für verschiedene i und k stattfindet (§. 3, 1), sondern nach Voraussetzung auch für gleiche i und k, wird für jedes k aus der Reihe $1, 2,.., n$

$$a_{k,1}\,x_1+a_{k,2}\,x_2+\,..\,+a_{k,n}\,x_n=0.$$

Beispiel. Die Gleichungen

$$\begin{matrix} a\,x+b\,y+c\,z=0 & \text{oder} & a\,u+b\,v+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1z=0 & & a_1u+b_1v+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 & & a_2u+b_2v+c_2=0 \end{matrix}$$

sind vereinbar, wenn

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0.$$

Unter dieser Bedingung ist

$$x:y:z=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b & c \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c & a \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a & b \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} c & a \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

4. Wenn die Coefficienten des in (1) betrachteten Systems von der Art sind, dass

$$a_{i,k}=-a_{k,i},\quad a_{i,i}=0,$$

*) Nach Bézout Hist. de l'Acad. de Paris 1764 p. 288. **) Jacobi Det. 7.

und wenn n **gerade** ist, so giebt es nach den Sätzen und Bezeichnungen von §. 8 die einfachere Auflösung:

$$(-1)^k(1,2,..,n)\, x_k = u_1\,(2,..,k-1,k+1,..,n) + u_2\,(3,..,k-1,k+1,..,n,1)$$
$$+ \ldots + u_n\,(1,..,k-1,k+1,..,n-1)\,^{*)}.$$

Multiplicirt man nämlich die gegebenen Gleichungen der Reihe nach mit

$$(2,..,k-1,k+1,..,n),\ (3,..,k-1,k+1,..,n,1),..,(1,..,k-1,k+1,..,n-1)$$

und addirt die erhaltenen Gleichungen, so bekommt x_k den Coefficienten

$$a_{1,k}\,(2,..,n) + a_{2,k}\,(3,..,n,1) + \ldots + a_{n,k}\,(1,..,n-1),$$

dessen Werth nach Vertauschung von $a_{1,k}$ mit $-a_{k,1}$, $a_{2,k}$ mit $-a_{k,2}$, u. s. w. durch

$$-(k,1,..,k-1,k+1,..,n)$$

dargestellt werden kann (§. 8, 4). Indem man noch das Suffix k mit $1,2,..,k-1$ vertauscht, erhält man für den gesuchten Coefficienten (§. 8, 2)

$$(-1)^k(1,2,..,n).$$

Dagegen hat x_i in der erhaltenen Summe den Coefficienten

$$-(i,1,..,k-1,k+1,..,n),$$

welcher nach §. 8, 2 identisch verschwindet.

5. Wenn die Coefficienten des linearen Systems von der Art sind, dass

$$a_{i,k} = -a_{k,i},\quad a_{i,i} = 0$$

und n **ungerade** ist, so ist $R=0$ (§. 3, 9) und die gegebenen Gleichungen sind nur dann vereinbar, wenn (2)

$$u_1\,\alpha_{1,k} + u_2\,\alpha_{2,k} + \ldots + u_n\,\alpha_{n,n} = 0.$$

Vermöge der Identität $\alpha_{i,k} = \sqrt{\alpha_{i,i}\,\alpha_{k,k}}$ (§. 7, 5) reducirt sich diese Bedingung auf

$$u_1\sqrt{\alpha_{1,1}} + u_2\sqrt{\alpha_{2,2}} + \ldots + u_n\sqrt{\alpha_{n,n}} = 0,$$

oder, indem man $\sqrt{\alpha_{i,i}} = (i+1,..,n,1,..,i-1)$ setzt (§. 8, 4),

$$u_1\,(2,..,n) + u_2\,(3,..,n,1) + \ldots + u_n\,(1,..,n-1) = 0\,^{**)}.$$

Beispiel. Unter den Gleichungen

$$\begin{array}{rrrl} * & cy & +bz & = f \\ -cx & * & +az & = g \\ bx & -ay & * & = h \end{array}$$

folgt eine aus den beiden andern, wenn

$$af + bg + ch = 0,$$

ausserdem widerstreitet eine den beiden andern.

Anmerkung. Wenn die Coefficienten des linearen Systems (1) von der Art sind, dass $a_{i,k} = \alpha_k^{\,i-1}$ ist, so ergiebt sich ebenfalls eine besondere Auflösung. Vergl. unten §. 12, 5. 6.

---

*) Jacobi Crelle J. 2 p. 356. **) Jacobi l. c.

§. 10. Lehrsätze über die linearen Differentialgleichungen.

1. Die Coefficienten einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, welche kein von der Function unabhängiges Glied enthält, lassen sich, wie Libri*) bemerkt hat, aus n particulären Integralen derselben in ähnlicher Weise zusammensetzen, wie die Coefficienten einer algebraischen Gleichung aus den Wurzeln derselben. Wenn nämlich $y_1, y_2, .., y_n$ particuläre Integrale der linearen Differentialgleichung

$$0 = a_0\, y + a_1\, y' + \,..\, + a_n\, y^{(n)}$$

bedeuten, worin $y^{(i)}$ der i^{te} Differentialquotient der Function y und die Grössen $a_0, a_1, .., a_n$ von $y, y', ..$ unabhängig sind, so bilde man die $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, .., n^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von $y_1, y_2, ..$ und die Determinante

$$R_n = \begin{vmatrix} y_1 & y_{1,1} & \cdot\cdot & y_{1,n-1} \\ y_2 & y_{2,1} & \cdot\cdot & y_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ y_n & y_{n,1} & \cdot\cdot & y_{n,n-1} \end{vmatrix},$$

worin $y_{i,k}$ den k^{ten} Differentialquotienten von y_i bedeutet. Wird nun der Coefficient von $y_{i,k}$ in R_n durch $\eta_{i,k} = \frac{\partial R_n}{\partial y_{i,k}}$ (§. 3, 7) bezeichnet, so erhält man

$$-R_n \frac{a_i}{a_n} = y_{1,n}\, \eta_{1,i} + y_{2,n}\, \eta_{2,i} + \,..\, + y_{n,n}\, \eta_{n,i}\; {}^{**)}.$$

Beweis. Nach den Voraussetzungen hat man zur Bestimmung der Coefficienten $a_0, a_1, .., a_n$ das System von linearen Gleichungen:

$$\begin{gathered} a_0\, y_1 + a_1\, y_{1,1} + \,..\, + a_{n-1}\, y_{1,n-1} = -a_n\, y_{1,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_0\, y_n + a_1\, y_{n,1} + \,..\, + a_{n-1}\, y_{n,n-1} = -a_n\, y_{n,n}, \end{gathered}$$

durch dessen Auflösung (§. 9, 1) der für a_i gegebene Werth gefunden wird. Die Bestimmung der Coefficienten misslingt, wenn die gegebenen particulären Integrale so von einander abhängen, dass $R_n = 0$ (§. 9, 2).

2. Die Determinante R_n lässt sich durch die Coefficienten von $y^{(n-1)}$ und $y^{(n)}$ ausdrücken. Unter den angegebenen Voraussetzungen ist

$$-R_n \frac{a_{n-1}}{a_n} = y_{1,n}\, \eta_{1,n-1} + \,..\, + y_{n,n}\, \eta_{n,n-1}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung hat den Werth $\frac{dR_n}{dx}$ (§. 3, 10), folglich ist

$$\frac{d \log R_n}{dx} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \log R_n = -\int \frac{a_{n-1}}{a_n}\, dx,$$

$$R_n = e^{-\int \frac{a_{n-1}}{a_n} dx}\; {}^{***)}.$$

---

*) Crelle J. 10 p. 189. Die Coefficienten sind von Libri durch ein weniger einfaches Verfahren dargestellt worden. Den directen Weg zu ihrer Bestimmung hat Libri zwar angedeutet, aber nicht eingeschlagen.

**) Brioschi Det. p. 81.

***) Abel (Crelle J. 2 p. 22) hat diese Relation für $n=2$ aufgestellt. Die allgemeine Formel wird Liouville von Tissot (Liouv. J. 17 p. 178) zugeschrieben.

3. Die Integration der linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$\text{(I)} \qquad a = a_0\, y + a_1\, y' + \, .. + a_n\, y^{(n)},$$

worin a, a_0, a_1, .. von y, y', .. unabhängig sind, lässt sich auf die Integration einer linearen Differentialgleichung $(n-m)^{ter}$ Ordnung reduciren, wenn m particuläre Integrale der einfacheren linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$\text{(II)} \qquad 0 = a_0\, y + a_1\, y' + \, .. + a_n\, y^{(n)}$$

gegeben sind. Lagrange (Miscell. Taur. 3 p. 179) hat diesen Satz 1764 ausgesprochen und die Möglichkeit der Reduction nachgewiesen. Die Reduction ist von D'Alembert (l. c. p. 381) in kurzen Umrissen ausgeführt worden, mit dessen Verfahren Libri's Abhandlung über diesen Gegenstand (Crelle J. 10 p. 185) im Wesentlichen zusammentrifft. Nachdem mit Hülfe der Determinanten von Malmstèn (Crelle J. 39 p. 91) die Ableitung des allgemeinen Integrals der Gleichung (II) aus $n-1$ particulären Integralen derselben gezeigt worden war, hat Joachimsthal (Crelle J. 40 p. 48) auch die Reduction der allgemeinern linearen Differentialgleichung (I) durch m gegebene particuläre Integrale der Gleichung (II) auf analoge Weise ausgeführt. Das hierzu dienliche Verfahren ist zum grossen Theil bereits von Lagrange vorgezeichnet, der in einer spätern Abhandlung (Mém. de Berlin 1775 p. 190) das allgemeine Integral der Gleichung (I) durch n particuläre Integrale der Gleichung (II) dargestellt hat.

Wenn y eine Function von x ist und y_1, y_2,.., y_m die gegebenen particulären Integrale der Gleichung (II) bedeuten, so lassen sich ebensoviel Functionen von x, welche durch b_1, b_2,.., b_m bezeichnet werden, durch Auflösung einer allgemeinen linearen Differentialgleichung $(n-m)^{ter}$ Ordnung und durch m Quadraturen dergestalt bestimmen, dass

$$y = b_1\, y_1 + b_2\, y_2 + \, .. + b_m\, y_m$$

das allgemeine Integral der Gleichung (I) werde. Bezeichnet man nämlich

$$\frac{d^k y_i}{dx^k} \text{ durch } y_{i,k}, \quad \frac{d b_i}{dx} \text{ durch } b_{i,1},$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
y' &= b_1\, y_{1,1} + .. + b_m\, y_{m,1}, && \text{wenn } b_{1,1}\, y_1 + .. + b_{m,1}\, y_m = 0,\\
y'' &= b_1\, y_{1,2} + .. + b_m\, y_{m,2}, && \text{wenn } b_{1,1}\, y_{1,1} + .. + b_{m,1}\, y_{m,1} = 0,\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot && \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
y^{(m-1)} &= b_1 y_{1,m-1} + .. + b_m y_{m,m-1}, && \text{wenn } b_{1,1}\, y_{1,m-2} + .. + b_{m,1}\, y_{m,m-2} = 0.
\end{aligned}$$

Durch die angenommenen Bedingungen sind aber bereits die Verhältnisse $b_{1,1}$: $b_{2,1}$: .. bestimmt (§. 9, 3), also erhält man weiter

$$\begin{aligned}
y^{(m)} &= b_1\, y_{1,m} + \, .. + b_m\, y_{m,m} + z,\\
&\quad \text{wo } b_{1,1}\, y_{1,m-1} + \, .. + b_{m,1}\, y_{m,m-1} = z,
\end{aligned}$$

eine bestimmte Function von x. Ebenso ist

$$\begin{aligned}
y^{(m+1)} &= b_1\, y_{1,m+1} + \, .. + b_m\, y_{m,m+1} + z' + z_1,\\
&\quad \text{wenn } b_{1,1}\, y_{1,m} + \, .. + b_{m,1}\, y_{m,m} = z_1, \quad \frac{dz}{dx} = z',\\
y^{(m+2)} &= b_1\, y_{1,m+2} + \, .. + b_m\, y_{m,m+2} + z'' + z_{1,1} + z_2,\\
&\quad \text{wenn } b_{1,1}\, y_{1,m+1} + \, .. + b_{m,1}\, y_{m,m+1} = z_2, \quad \frac{dz_1}{dx} = z_{1,1},
\end{aligned}$$

$$y^{(n)} = b_1 y_{1,n} + \dots + b_m y_{m,n} + z^{(n-m)} + z_{1,n-m-1} + \dots$$
$$+ z_{n-m-1,1} + z_{n-m},$$
$$\text{wenn } b_{1,1} y_{1,n-1} + \dots + b_{m,1} y_{m,n-1} = z_{n-m}.$$

Indem man diese Gleichungen der Reihe nach mit a_0, a_1,.. multiplicirt und dann addirt, so findet man vermöge der über y_1, y_2,.., y_m gemachten Voraussetzungen

$$\begin{aligned}a = a_m z + a_{m+1} z' + a_{m+2} z'' + \dots + a_n z^{(n-m)} \\ + a_{m+1} z_1 + a_{m+2} z_{1,1} + \dots + a_n z_{1,n-m-1} \\ + a_{m+2} z_2 + \dots + a_n z_{2,n-m-2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + a_n z_{n-m}\end{aligned}$$

als Bedingung, unter welcher $b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$ ein Integral der Gleichung (I) ist.

Durch Auflösung des Systems von Gleichungen

$$\begin{aligned}b_{1,1} y_1 + \dots + b_{m,1} y_m &= 0 \\ b_{1,1} y_{1,1} + \dots + b_{m,1} y_{m,1} &= 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{1,1} y_{1,m-2} + \dots + b_{m,1} y_{m,m-2} &= 0 \\ b_{1,1} y_{1,m-1} + \dots + b_{m,1} y_{m,m-1} &= z\end{aligned}$$

findet man aber (§. 9, 1)

$$b_{i,1} R_m = \eta_{i,m-1} z, \quad b_i = \int \frac{\eta_{i,m-1}}{R_m} z\,dx,$$

wenn

$$R_m = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots y_m \\ y_{1,1} & y_{2,1} & \dots y_{m,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{1,m-1} & y_{2,m-1} & \dots y_{m,m-1} \end{vmatrix}$$

und

$$\eta_{i,m-1} = \frac{\partial R_m}{\partial y_{i,m-1}}$$

der Coefficient von $y_{i,m-1}$ in R_m ist. Die Functionen b_1, b_2,.., b_m sind also durch Quadraturen bestimmt, nachdem z gefunden ist. Um nun die Gleichung, wodurch z bestimmt ist, frei von b_1, b_2,.. darzustellen, bemerke man

$$\begin{aligned}z_1 &= b_{1,1} y_{1,m} + \dots + b_{m,1} y_{m,m} \\ &= (\eta_{1,m-1} y_{1,m} + \dots + \eta_{m,m-1} y_{m,m}) \frac{z}{R_m} = c_1 z \\ z_2 &= b_{1,1} y_{1,m+1} + \dots + b_{m,1} y_{m,m+1} \\ &= (\eta_{1,m-1} y_{1,m+1} + \dots + \eta_{m,m-1} y_{m,m+1}) \frac{z}{R_m} = c_2 z \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_{n-m} &= b_{1,1} y_{1,n-1} + \dots + b_{m,1} y_{m,n-1} \\ &= (\eta_{1,m-1} y_{1,n-1} + \dots + \eta_{m,m-1} y_{m,n-1}) \frac{z}{R_m} = c_{n-m} z,\end{aligned}$$

wodurch c_1, c_2,.., c_{n-m} gegebene Functionen von x sind. Daher findet man durch Differentiation nach analoger Bezeichnung

$$\begin{aligned}z_{i,1} &= c_{i,1} z + c_i z' \\ z_{i,2} &= c_{i,2} z + 2 c_{i,1} z' + c_i z'' \\ z_{i,3} &= c_{i,3} z + 3 c_{i,2} z' + 3 c_{i,1} z'' + c_i z''', \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot\end{aligned}$$

folglich ist

$$\begin{aligned} a = {} & a_m\, z \\ & + a_{m+1}\, (c_1\, z + z') \\ & + a_{m+2}\, (c_{1,1}\, z + c_1\, z' + z'' \\ & \qquad + c_2\, z) \\ & + a_{m+3}\, (c_{1,2}\, z + 2\,c_{1,1}\, z' + c_1\, z'' + z''' \\ & \qquad + c_{2,1}\, z + c_2\, z' \\ & \qquad + c_3\, z) \\ & + a_{m+4}\, (c_{1,3}\, z + 3\,c_{1,2}\, z' + 3\,c_{1,1}\, z'' + c_1\, z^{(3)} + z^{(4)} \\ & \qquad + c_{2,2}\, z + 2\,c_{2,1}\, z' + c_2\, z'' \\ & \qquad + c_{3,1}\, z + c_3\, z' \\ & \qquad + c_4\, z) \\ & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

die lineare Gleichung $(m-n)^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher die Function z genügen muss. Aus dem gefundenen Werth von z lassen sich dann die Functionen $b_1, b_2, .., b_m$ berechnen, so dass

$$b_1\, y_1 + b_2\, y_2 + \,..\, + b_m\, y_m$$

ein Integral der Gleichung (I) wird. Da in den particulären Integralen $y_1, y_2, .., y_m$ nach üblicher Voraussetzung unbestimmte Constanten nicht vorkommen, da ferner das allgemeine Integral z der zuletzt gefundenen linearen Gleichung $n-m$ unbestimmte Constanten enthält, und durch m Quadraturen bei der Berechnung von $b_1, b_2, .., b_m$ andere m unbestimmte Constanten entstehen, so hat das gefundene Integral der Gleichung (I) die erforderliche Anzahl von n unbestimmten Constanten, wodurch es als das allgemeine Integral der Gleichung (I) erscheint.

4. Die lineare Differentialgleichung, welche bei der Integration der gegebenen Differentialgleichung zu lösen übrig bleibt, ist im Allgemeinen nicht lösbar, wenn sie die erste Ordnung übersteigt. Also kommen besonders die Fälle $m = n$ und $m = n-1$ in Betracht.

Für $m = n$ wird $\quad a = a_n\, z, \quad b_{i,1}\, R_n = \frac{a}{a_n}\, \eta_{i,n-1},$

$$b_i = \int \frac{a}{a_n}\, \frac{\eta_{i,n-1}}{R_n}\, dx,$$

folglich ist das allgemeine Integral der Gleichung (I)

$$y = y_1 \int \frac{a}{a_n R_n}\, \eta_{1,n-1}\, dx + y_2 \int \frac{a}{a_n R_n}\, \eta_{2,n-1}\, dx + \,..\, + y_n \int \frac{a}{a_n R_n}\, \eta_{n,n-1}\, dx,$$

wie Lagrange und Joachimsthal a. a. O. bemerkt haben.

Für $m = n-1$ wird $a = a_{n-1}\, z + a_n\, (c_1\, z + z')$. Nun ist (§. 3, 10)

$$R_{n-1}\, c_1 = \eta_{1,n-2}\, y_{1,n-1} + \,..\, + \eta_{n-1,n-2}\, y_{n-1,n-1} = \frac{dR_{n-1}}{dx},$$

folglich

$$a\, R_{n-1} = a_{n-1}\, R_{n-1}\, z + a_n\, \frac{d(R_{n-1}\, z)}{dx}.$$

Zur Auflösung dieser Gleichung bedarf man eines particulären Integrals u_1 der Gleichung $0 = a_{n-1}\, u + a_n\, u'$, nämlich

$$u_1 = e^{-\int \frac{a_{n-1}}{a_n}\, dx}.$$

Setzt man nun das zunächst gesuchte allgemeine Integral

$$R_{n-1}\, z = u_1\, v_1\,,$$

folglich nach der angenommenen Bezeichnung

$$(R_{n-1}\, z)' = u_{1,1}\, v_1 + u_1\, v_{1,1}\,,$$

so erhält man, weil nach Voraussetzung $a_{n-1}\, u_1 + a_n\, u_{1,1} = 0$ ist,

$$a\, R_{n-1} = a_n\, u_1\, v_{1,1}\,, \quad v_1 = \int \frac{a\, R_{n-1}}{a_n\, u_1}\, dx\,,$$

$$R_{n-1}\, z = u_1 \int \frac{a\, R_{n-1}}{a_n\, u_1}\, dx$$

mit einer unbestimmten Constante. Zur Bestimmung von b_i hat man endlich

$$b_{i,1}\, R_{n-1} = \frac{u_1\, v_1}{R_{n-1}}\, \eta_{i,n-2}\,,$$

$$b_i = \int \frac{u_1\, v_1}{R_{n-1}^2}\, \eta_{i,n-2}\, dx$$

mit je einer neuen unbestimmten Constante, so dass $y = b_1\, y_1 + \ldots + b_{n-1}\, y_{n-1}$ das allgemeine Integral der Gleichung (I) ist, wie Joachimsthal (l. c.) bemerkt hat. Den besondern Fall $a = 0$, in welchem v_1 selbst zur unbestimmten Constante wird, hatte Malmstén (l. c.) früher analog behandelt.

§. 11. Resultante von zwei algebraischen Gleichungen.

1. Wenn

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m\, x^m$$
$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n\, x^n,$$

so sind die zur Bestimmung der Unbekannten x gegebenen Gleichungen $f(x) = 0$ und $\varphi(x) = 0$ vereinbar, wenn wenigstens eine Wurzel der ersten Gleichung mit einer Wurzel der zweiten Gleichung übereinstimmt. Bezeichnet man die Wurzeln der ersten Gleichung durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, die Wurzeln der zweiten Gleichung durch $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, das Product aller Differenzen zwischen den Wurzeln der ersten Gleichung und den Wurzeln der zweiten Gleichung, welche aus $\alpha_i - \beta_k$ entspringen, indem $i = 1, 2, \ldots, m$ und $k = 1, 2, \ldots, n$ gesetzt wird, durch

$$\prod_{i,k} (\alpha_i - \beta_k)\,,$$

so ist

$$\prod_{i,k} (\alpha_i - \beta_k) = 0$$

die nothwendige und genügende Bedingung für das Zusammenbestehen der gegebenen Gleichungen*) und wird die **Resultante** derselben genannt (§. 9, 3).

Sind $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ gegebene Functionen von y, so ist auch $\prod_{i,k} (\alpha_i - \beta_k)$ eine Function von y. Wenn nun für $y = \gamma$ dieses Product, mithin ein Factor desselben, verschwindet, so haben die Gleichungen $f(x) = 0$ und $\varphi(x) = 0$ eine gemeinschaftliche Wurzel α_r; folglich wird durch die Werthe $x = \alpha_r$ und $y = \gamma$ den gegebenen Gleichungen genügt.

---

*) Euler Hist. de l'Acad. de Berlin 1748 p. 234.

2. Wenn sowohl die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m$ als auch $\beta_1, \beta_2, .., \beta_n$ von einander verschieden sind, so ist das Product $\prod_{i,k} (\alpha_i - \beta_k)$ sowohl eine ganze rationale Function der Grössen

$$\frac{b_0}{b_n}, \frac{b_1}{b_n}, \ldots, \frac{b_{n-1}}{b_n}$$

vom m^{ten} Grade, als auch eine ganze rationale Function der Grössen

$$\frac{a_0}{a_m}, \frac{a_1}{a_m}, \ldots, \frac{a_{m-1}}{a_m}$$

vom n^{ten} Grade, daher auch eine symmetrische ganze rationale Function der Wurzeln von $\varphi(x)=0$, sowie der Wurzeln von $f(x)=0$, welche sich bekanntlich in eine ganze rationale Function der Coefficienten von $f(x)$ und $\varphi(x)$ verwandeln lässt*). Denn aus der Identität

$$\varphi(x) = b_n (x-\beta_1)(x-\beta_2) \ldots (x-\beta_n)$$

folgt

$$(\alpha_i-\beta_1)(\alpha_i-\beta_2) \ldots (\alpha_i-\beta_n) = \frac{\varphi(\alpha_i)}{b_n},$$

mithin

$$\prod_{i,k} (\alpha_i-\beta_k) = \frac{1}{b_n^m} \varphi(\alpha_1)\, \varphi(\alpha_2) \ldots \varphi(\alpha_m).$$

Ebenso ist

$$f(x) = (-1)^m a_m (\alpha_1-x)(\alpha_2-x) \ldots (\alpha_m-x),$$

$$(\alpha_1-\beta_k)(\alpha_2-\beta_k) \ldots (\alpha_m-\beta_k) = \frac{(-1)^m}{a_m} f(\beta_k),$$

$$\prod_{i,k} (\alpha_i-\beta_k) = \frac{(-1)^{mn}}{a_m^n} f(\beta_1)\, f(\beta_2) \ldots f(\beta_n),$$

woraus die obigen Behauptungen sich unmittelbar ergeben.

3. Anstatt das Product $\prod_{i,k} (\alpha_i-\beta_k)$ in eine Reihe von symmetrischen rationalen ganzen Functionen der Wurzeln von einer der gegebenen Gleichungen zu entwickeln und diese Functionen durch die Coefficienten derselben Gleichung auszudrücken, kann man einfacher zu der Resultante der gegebenen Gleichungen gelangen, indem man die Unbekannte x aus denselben eliminirt.

Die durch Elimination von x aus $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ abgeleitete Gleichung $R=0$ ist die Resultante derselben (aequatio finalis genuina), wenn R eine rationale ganze Function der von einander unabhängigen Grössen

$$\frac{b_0}{b_n}, \frac{b_1}{b_n}, \ldots, \frac{b_{n-1}}{b_n}$$

vom m^{ten} Grade und eine rationale ganze Function der von einander unabhängigen Grössen

$$\frac{a_0}{a_m}, \frac{a_1}{a_m}, \ldots, \frac{a_{m-1}}{a_m}$$

vom n^{ten} Grade ist**). Denn für jedes System von Werthen der Coefficienten a_0, $a_1, .., b_0, b_1, ..$, wodurch $\prod_{i,k} (\alpha_i-\beta_k)$ verschwindet, haben $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ eine gemeinschaftliche Wurzel α_r, durch deren Elimination aus den Gleichungen $f(\alpha_r)=0$ und $\varphi(\alpha_r)=0$ die Gleichung $R=0$ gefunden wird, d. h. wenn $\prod_{i,k} (\alpha_i-\beta_k)$ verschwindet, so verschwindet auch R. Nun sind diese Grössen ganze rationale

*) Euler l. c. **) Euler l. c. Vergl. Cauchy Exerc. d'Anal. 1840 p. 400.

Functionen von $\frac{b_0}{b_n}, \frac{b_1}{b_n}, \ldots$, sowie von $\frac{a_0}{a_m}, \frac{a_1}{a_m}, \ldots$ desselben Grades nach (2) und der obigen Voraussetzung; also können sie nur durch einen von den genannten Quotienten unabhängigen Factor verschieden sein.

Wenn dagegen in der Gleichung $R=0$, welche durch Elimination von x aus $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ abgeleitet worden ist, R eine Function der genannten Grössen von anderem als dem bezeichneten Grade ist, so enthält diese Function entweder einen fremden Factor, dessen Annullirung eine gemeinschaftliche Wurzel der gegebenen Gleichung nicht zur Folge hat, oder sie verschwindet identisch.

4. Um durch Elimination von x aus den Gleichungen $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ die Resultante dieser Gleichungen zu erhalten, haben gleichzeitig Euler *) und Bézout **) ein in allen Fällen richtiges Verfahren erfunden, welches neuerlich von Sylvester ***) und Hesse †) reproducirt worden ist. Man bildet nämlich die Identitäten

$$\begin{array}{rl} f(x) = & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \\ x\, f(x) = & \quad a_0 x + a_1 x^2 + \ldots \\ x^2 f(x) = & \quad\quad a_0 x^2 + \ldots \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ x^{n-1} f(x) = & \quad\quad\quad a_0 x^{n-1} + \ldots + a_m x^{m+n-1} \\ \varphi(x) = & b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots \\ x\, \varphi(x) = & \quad b_0 x + b_1 x^2 + \ldots \\ x^2 \varphi(x) = & \quad\quad b_0 x^2 + \ldots \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ x^{m-1} \varphi(x) = & \quad\quad\quad b_0 x^{m-1} + \ldots + b_n x^{m+n-1}. \end{array}$$

Bedeutet R die Determinante $(m+n)^{\text{ten}}$ Grades, deren Elemente in den n ersten Horizontalreihen

$$\begin{array}{cccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_m & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & & a_m & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & a_0 & \ldots & & & a_m & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot \quad a_m \end{array}$$

und in den m folgenden Horizontalreihen

$$\begin{array}{cccccccc} b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_n & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots & & b_n & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & b_0 & \ldots & & & b_n & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_0 & \cdot & \cdot & \cdot \quad b_n \end{array}$$

sind; bedeutet ferner $\gamma_{i-1,k-1}$ den Coefficienten des k^{ten} Elements der i^{ten} Horizontalreihe in R, so ist (§. 9, 1)

$$R x^i = (\gamma_{0,i} + \gamma_{1,i} x + \ldots + \gamma_{n-1,i} x^{n-1}) f(x) \\ + (\gamma_{n,i} + \gamma_{n+1,i} x + \ldots + \gamma_{m+n-1,i} x^{m-1}) \varphi(x).$$

Wenn nun $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$, so ist $R=0$ die Resultante des obigen Systems von Gleichungen (§. 9, 3). Die Determinante R durch $a_m^n b_n^m$ dividirt

*) Hist. de l'Acad. de Berlin 1764 p. 96. **) Hist. de l'Acad. de Paris 1764 p. 298. ***) Philos. Mag. 1840 no. 101. Vergl. Richelot Crelle J. 21 p. 226. †) Crelle J. 27 p. 1.

(§. 3, 2) ist aber eine ganze rationale Function n^{ten} Grades in Bezug auf $\frac{a_0}{a_m}, \frac{a_1}{a_m}, \ldots$, m^{ten} Grades in Bezug auf $\frac{b_0}{b_n}, \frac{b_1}{b_n}, \ldots$, und die Factoren a_m und b_n sind bei der Bildung von R als nicht verschwindend vorausgesetzt, folglich (3) ist $R=0$ die Resultante der Gleichungen $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$.

5. Auf dem eben angezeigten Wege erhält man die Resultante der gegebenen Gleichungen nicht in kürzester Form, weil von den Elementen der Determinante $(m+n)^{\text{ten}}$ Grades eine grosse Menge verschwinden. Das zu erwünschter Abkürzung dienende Eliminationsverfahren, welches von Bézout in der angeführten Abhandlung (p. 317) angewendet worden ist, haben in neuerer Zeit Jacobi *) und Cauchy **) in Erinnerung gebracht und erläutert. Aus den gegebenen Gleichungen, welche zunächst beide als Gleichungen n^{ten} Grades vorausgesetzt werden, lassen sich nämlich n Gleichungen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ableiten, aus denen dann durch Bildung einer Determinante n^{ten} Grades die Resultante der gegebenen Gleichungen gewonnen wird. Da

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r + (a_{r+1} + a_{r+2} x + \ldots + a_n x^{n-r-1}) x^{r+1},$$
$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_r x^r + (b_{r+1} + b_{r+2} x + \ldots + b_n x^{n-r-1}) x^{r+1},$$

so ist

$$\begin{aligned}(b_{r+1} + b_{r+2} x + \ldots + b_n x^{n-r-1}) F(x) - (a_{r+1} + a_{r+2} x + \ldots + a_n x^{n-r-1}) \varphi(x) \\ = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r)(b_{r+1} + b_{r+2} x + \ldots + b_n x^{n-r-1}) \\ - (b_0 + b_1 x + \ldots + b_r x^r)(a_{r+1} + a_{r+2} x + \ldots + a_n x^{n-r-1})\end{aligned}$$

eine Function von x vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, welche durch u_r bezeichnet werden soll. Aus dem System der Identitäten

$$\begin{array}{l} c_{0,0} + c_{0,1} x + \ldots + c_{0,n-1} x^{n-1} = u_0 \\ c_{1,0} + c_{1,1} x + \ldots + c_{1,n-1} x^{n-1} = u_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{n-1,0} + c_{n-1,1} x + \ldots + c_{n-1,n-1} x^{n-1} = u_{n-1} \end{array}$$

folgt (§. 9, 1)

$$R x^i = u_0 \gamma_{0,i} + u_1 \gamma_{1,i} + \ldots + u_{n-1} \gamma_{n-1,i},$$

worin

$$R = \begin{vmatrix} c_{0,0} & \cdot\cdot & c_{0,n-1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \\ c_{n-1,0} & \cdot\cdot & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

und $\gamma_{i,k}$ der Coefficient von $c_{i,k}$ in R. Wenn nun $F(x)=0$ und $\varphi(x)=0$, so ist $u_0=0$, $u_1=0, \ldots, u_{n-1}=0$, folglich $R=0$ die Resultante des Systems dieser letzteren Gleichungen. Nun sind die Elemente $c_{i,k}$ lineare Functionen sowohl von $a_0, a_1, \ldots$ als auch von $b_0, b_1, \ldots$, folglich ist die Determinante R eine Function n^{ten} Grades derselben Grössen, mithin (3) ist $R=0$ die Resultante der gegebenen Gleichungen $F(x)=0$ und $\varphi(x)=0$.

6. Das Element $c_{r,s}$ der Determinante R ist der Coefficient von x^s in u_r. Nun ist

$$\begin{aligned} u_r &= (\Sigma a_i x^i)(\Sigma b_k x^{k-r-1}) - (\Sigma b_i x^i)(\Sigma a_k x^{k-r-1}) \\ &= \Sigma (a_i b_k - a_k b_i) x^{i+k-r-1}, \end{aligned}$$

---

*) Crelle J. 15 p. 101. **) Exerc. d'Anal. 1840 p. 398.

worin man $i = 0, 1, .., r$ und $k = r+1, r+2, .., n$ zu setzen hat. Durch Hinzufügung der Bedingung $i+k-r-1 = s$ erhält man, wenn

$$d_{i,k} = a_i\, b_k - a_k\, b_i$$

zur Abkürzung eingeführt wird,

$$c_{r,s} = d_{0,r+s+1} + d_{1,r+s} + \,..\, + d_{r-1,s+2} + d_{r,s+1}\,.$$

Wenn $r > s$, so verschwinden die letzten $r-s$ dieser Glieder identisch, nämlich

$$d_{s+1,r} + d_{s+2,r-1} + \,..\, + d_{r-1,s+2} + d_{r,s+1}\,,$$

weil $d_{i,k} = - d_{k,i}$ und $d_{i,i} = 0$. Folglich ist

$$c_{r,s} = d_{0,r+s+1} + d_{1,r+s} + \,..\, + d_{s,r+1} = c_{s,r} \text{ *)}.$$

Wenn $r+s+1 > n$, so verschwinden die ersten $r+s+1-n$ Glieder, weil a_{n+1}, $a_{n+2}, .., b_{n+1}, b_{n+2}, ..$ zufolge der über den Grad der Gleichungen gemachten Voraussetzung als verschwindend anzusehen sind.

Die Summe der ersten $r-1$ Glieder von $c_{r,s}$ ist identisch mit $c_{r-1,s+1}$, folglich hat man

$$c_{r,s} = c_{r-1,s+1} + d_{r,s+1} \text{ **)}$$

zur successiven Berechnung der Elemente von R.

Beispiele. Um die Resultante der Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 \\ 0 &= b_0 + b_1\, x + b_2\, x^2 \end{aligned}$$

zu finden, bildet man

$$c_{0,0} = d_{0,1} \quad c_{0,1} = d_{0,2} \quad c_{1,1} = d_{1,2}$$

und erhält

$$\begin{vmatrix} d_{0,1} & d_{0,2} \\ d_{0,2} & d_{1,2} \end{vmatrix} = 0.$$

Um die Resultante der Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 \\ 0 &= b_0 + b_1\, x + b_2\, x^2 + b_3\, x^3 \end{aligned}$$

zu finden, bildet man

$$\begin{array}{lll} c_{0,0} = d_{0,1} & & \\ c_{0,1} = d_{0,2} & c_{1,1} = d_{0,3} + d_{1,2} & \\ c_{0,2} = d_{0,3} & c_{1,2} = d_{1,3} & c_{2,2} = d_{2,3} \end{array}$$

und erhält

$$\begin{vmatrix} d_{0,1} & d_{0,2} & d_{0,3} \\ d_{0,2} & d_{0,3} + d_{1,2} & d_{1,3} \\ d_{0,3} & d_{1,3} & d_{2,3} \end{vmatrix} = 0.$$

Um die Resultante der Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + a_4\, x^4 \\ 0 &= b_0 + b_1\, x + b_2\, x^2 + b_3\, x^3 + b_4\, x^4 \end{aligned}$$

zu erhalten, bildet man

$$\begin{array}{llll} c_{0,0} = d_{0,1} & & & \\ c_{0,1} = d_{0,2} & c_{1,1} = d_{0,3} + d_{1,2} & & \\ c_{0,2} = d_{0,3} & c_{1,2} = d_{0,4} + d_{1,3} & c_{2,2} = d_{1,4} + d_{2,3} & \\ c_{0,3} = d_{0,4} & c_{1,3} = d_{1,4} & c_{2,3} = d_{2,4} & c_{3,3} = d_{3,4} \end{array}$$

*) Jacobi l. c. p. 102. **) Jacobi l. c. p. 114.

und findet

$$\begin{vmatrix} d_{0,1} & d_{0,2} & d_{0,3} & d_{0,4} \\ d_{0,2} & d_{0,3}+d_{1,2} & d_{0,4}+d_{1,3} & d_{1,4} \\ d_{0,3} & d_{0,4}+d_{1,3} & d_{1,4}+d_{2,3} & d_{2,4} \\ d_{0,4} & d_{1,4} & d_{2,4} & d_{3,4} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinanten lassen sich nach §. 5, 2 weiter entwickeln, wobei die Identität (§. 3, 11)

$$d_{i,k}\, d_{l,m} + d_{k,l}\, d_{i,m} + d_{l,i}\, d_{k,m} = 0$$

gebraucht werden kann. In der mitgetheilten Form sind die Resultanten höherer Gleichungen übersichtlicher, als in den Formen, welche man ihnen früher gab.

7. Wenn $R=0$ die Resultante der Gleichungen $F(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ ist und $\gamma_{r,s}$ wie oben den Coefficienten von $c_{r,s}$ in R bedeutet, so folgt aus dem System der Gleichungen

$$u_0=0,\ u_1=0, \ldots, u_{n-1}=0$$

für die gemeinschaftliche Wurzel x der Gleichungen $F(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ die Proportion (§. 9, 3)

$$1 : x : x^2 : \ldots : x^{n-1} = \gamma_{i,0} : \gamma_{i,1} : \gamma_{i,2} : \ldots : \gamma_{i,n-1},$$

worin i irgend ein Suffix aus der Reihe $0, 1, \ldots, n-1$. Daher ist die gemeinschaftliche Wurzel der gegebenen Gleichungen, wenn anders eine solche existirt, eine rationale Function der in den Gleichungen vorkommenden Coefficienten.

Aus den Proportionen

$$x^k : x^s = \gamma_{i,k} : \gamma_{i,s}$$
$$x^i : x^r = \gamma_{s,i} : \gamma_{s,r}$$

ergiebt sich vermöge der Identität $\gamma_{s,r} = \gamma_{r,s}$ (§. 3, 9)

$$x^{i+k} : x^{r+s} = \gamma_{i,k} : \gamma_{r,s},$$

woraus einerseits folgt, dass $\gamma_{i,k}$ sich nicht ändert, wenn $i+k$ unverändert bleibt und dass man die Grössen $\gamma_{i,k}, \gamma_{i-1,k+1}, \ldots$ passend durch γ_{i+k} bezeichnen könne; andrerseits, dass man jene Proportion bis zur $(2n-2)^{\text{ten}}$ Potenz von x fortsetzen könne, nämlich

$$1 : x : x^2 : \ldots : x^{2n-2} = \gamma_0 : \gamma_1 : \gamma_2 : \ldots : \gamma_{2n-2}\ ^{*)}.$$

Die Grössen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2n-2}$ bilden also eine geometrische Progression, deren constantes Verhältniss (Exponent) die gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $F(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ ist. Daraus lassen sich die Relationen

$$\gamma_i = \gamma_0\, x^i, \quad \gamma_k = \gamma_0\, x^k, \quad \gamma_{i+k} = \gamma_0\, x^{i+k}$$

ableiten, mithin die Identitäten

$$\gamma_i = \gamma_0 \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\right)^i, \quad \gamma_i\,\gamma_k - \gamma_0\,\gamma_{i+k} = 0,$$

wovon die letztere mit §. 7, 4 in Einklang ist.

8. Wenn $f(x)$ von niederem Grade als $\varphi(x)$ ist, z. B. $f(x)$ vom m^{ten}, $\varphi(x)$ vom n^{ten} d. i. $(m+p)^{\text{ten}}$ Grade, so lässt sich die Resultante der Gleichungen $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ aus der Resultante der Gleichungen

---

*) Jacobi l. c. p. 106.

$$x^p f(x) = 0 \text{ und } \varphi(x) = 0$$

ableiten. Die Gleichung $x^p f(x) = 0$ hat nämlich ausser den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ noch p Wurzeln, welche Null sind; folglich ist (2)

$$\frac{1}{b_n^{m+p}} [\varphi(0)]^p \varphi(\alpha_1) \varphi(\alpha_2) \ldots \varphi(\alpha_m) = 0$$

die Resultante der Gleichungen

$$x^p f(x) = 0 \text{ und } \varphi(x) = 0,$$

während

$$\frac{1}{b_n^m} \varphi(\alpha_1) \varphi(\alpha_2) \ldots \varphi(\alpha_m) = 0$$

die Resultante der gegebenen Gleichungen $f(x) = 0$ und $\varphi(x) = 0$ ist. Hat man daher nach Bézout's Methode (5) die Resultante $R = 0$ der ersteren Gleichungen gefunden, so ist

$$R : \left(\frac{b_0}{b_n}\right)^p = 0$$

die Resultante der gegebenen Gleichungen.

Dass R in diesem Falle durch b_0^p theilbar ist, lässt sich*) mit Hülfe des Satzes (§. 6, 4) nachweisen, nach welchem

$$\begin{vmatrix} c_{0,0} & \ldots & c_{0,n-1} \\ \cdot & \ldots & \\ c_{n-1,0} & \ldots & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{0,0} & \ldots & f_{0,p-1} \\ \cdot & \ldots & \\ f_{p-1,0} & \ldots & f_{p-1,p-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_{0,0} & \ldots & g_{0,n-1} \\ \cdot & \ldots & \\ g_{n-1,0} & \ldots & g_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

ist, wenn für $r = 0, 1, \ldots, p-1$

$$c_{r,s} = f_{r,0}\, g_{s,0} + f_{r,1}\, g_{s,1} + \ldots + f_{r,p-1}\, g_{s,p-1}$$

und für $r = p, p+1, \ldots, n-1$

$$c_{r,s} = g_{s,r}.$$

Um die in (5) gebrauchte Function $F(x)$ mit der hier zu brauchenden $x^p f(x)$ zu identificiren, hat man $a_0 = 0$, $a_1 = 0, \ldots, a_{p-1} = 0$ zu setzen. Dadurch wird (6) für $r = 0, 1, \ldots, p-1$

$$c_{r,s} = -a_{s+1}\, b_r - a_{s+2}\, b_{r-1} - \ldots - a_{r+s+1}\, b_0.$$

Setzt man bei diesen Werthen von r

$$f_{r,i} = -b_{r-i},\quad g_{s,i} = a_{s+1+i},$$

so erhält man

$$f_{r,0}\, g_{s,0} + f_{r,1}\, g_{s,1} + \ldots + f_{r,p-1}\, g_{s,p-1} = c_{r,s},$$

weil $f_{r,r+1}, f_{r,r+2}, \ldots$ als verschwindend anzusehen sind. Setzt man bei den übrigen Werthen von r

$$g_{s,r} = c_{r,s} = c_{s,r},$$

so wird in der That

$$R = \begin{vmatrix} f_{0,0} & \ldots & f_{0,p-1} \\ \cdot & \ldots & \\ f_{p-1,0} & \ldots & f_{p-1,p-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_{0,0} & \ldots & g_{0,n-1} \\ \cdot & \ldots & \\ g_{n-1,0} & \ldots & g_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -b_0 & 0 & 0 & \ldots & \cdot \\ -b_1 & -b_0 & 0 & \ldots & \cdot \\ -b_2 & -b_1 & -b_0 & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ -b_{p-1} & -b_{p-2} & -b_{p-3} & \ldots & -b_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots 0 & a_p & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & \ldots a_p & a_{p+1} & \ldots & a_n & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ a_p & a_{p+1} & \ldots & & & & \\ c_{p,0} & c_{p,1} & \ldots & & & c_{p,n-1} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & \ldots & & & c_{n-1,n-1} & \end{vmatrix}.$$

*) Rosenhain Crelle J. 28 p. 268.

Die erste dieser Determinanten ist $(-b_0)^p$ nach §. 2, 7, die andere ist die Determinante der Coefficienten von folgenden n Functionen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades:

$$x^{p-1} f(x),\ x^{p-2} f(x), \ldots, f(x),\ u_p, \ldots, u_{n-1},$$

von denen die letztern auf die in (5) angegebene Weise zu bilden sind. Daher ist die gesuchte Resultante der Gleichungen $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ übereinstimmend mit der Resultante der Gleichungen

$$x^{p-1} f(x) = 0,\ x^{p-2} f(x) = 0, \ldots, f(x) = 0,\ u_p = 0, \ldots, u_{n-1} = 0.$$

Anmerkung. Wenn man nach Bézout (l. c. p. 323) aus $x^p f(x)$ und $\varphi(x)$ nach (5) die Functionen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ bildet; wenn man ferner aus den Gleichungen $f(x)=0,\ x f(x)=0, \ldots, x^{p-1} f(x)=0$ die Grössen x^m, $x^{m+1}, \ldots, x^{n-1}$ als Functionen $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades darstellt und dadurch die Functionen $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ auf den $(m-1)^{\text{ten}}$ Grad reducirt, so ist die Resultante der Gleichungen

$$u_0 = 0,\ u_1 = 0, \ldots, u_{m-1} = 0$$

zwar in Bezug auf die Coefficienten von $\varphi(x)$ vom m^{ten} Grade, aber in Bezug auf die Coefficienten von $f(x)$ im Allgemeinen nicht vom n^{ten} Grade, folglich von der Resultante der Gleichungen $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ im Allgemeinen verschieden.

9. Wie man die Bedingungen finden könne, unter denen zwei gegebene Gleichungen $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ zwei oder mehr Wurzeln gemein haben, ist von Euler am Ende der zuletzt erwähnten Abhandlung*) gezeigt worden. Die zu diesem Zwecke erforderlichen Eliminationen werden übersichtlicher, wenn man sich des von Lagrange**) angegebenen Verfahrens bedient.

Wenn man durch α eine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ bezeichnet und wenn $\varphi(\alpha)=-y$ ist, so ist die durch Elimination von α hervorgehende Resultante der Gleichungen $f(\alpha)=0$ und $\varphi(\alpha)+y=0$ in Bezug auf y vom m^{ten} Grade (1) und hat soviel verschwindende Wurzeln als $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ Wurzeln gemein haben. Aus der Resultante $R=0$ der Gleichungen $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ entspringt aber die Resultante der Gleichungen $f(x)=0$ und $\varphi(x)+y=0$, indem $\varphi(0)=b_0$ um y wächst. Unter der Voraussetzung, dass die Coefficienten b_0, $b_1, \ldots, b_n$ von einander unabhängig sind, dass also zwischen den Wurzeln der Gleichung $\varphi(x)=0$ eine Relation nicht stattfindet, geht R durch Einführung von b_0+y statt b_0 in

$$R + \frac{dR}{db_0} y + \frac{1}{2} \frac{d^2R}{db_0^2} y^2 + \ldots$$

über. Folglich ist

$$0 = R + \frac{dR}{db_0} y + \frac{1}{2} \frac{d^2R}{db_0^2} y^2 + \ldots$$

die Resultante der Gleichungen $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$. Die Bedingungen dafür, dass diese Gleichung 1, 2, 3,.. verschwindende Wurzeln habe, also auch dafür, dass $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ eine, zwei, drei u. s. f. Wurzeln gemein haben, sind

*) Hist. de l'Acad. de Berlin 1764 p. 64.

**) Mém. de l'Acad. de Berlin 1770. »Réflexions etc.« art. 12.

$$R=0$$
$$R=0,\quad \frac{dR}{db_0}=0$$
$$R=0,\quad \frac{dR}{db_0}=0,\quad \frac{d^2R}{db_0^2}=0$$
u. s. f.

unter der Voraussetzung, dass die Coefficienten der Function $\varphi(x)$ von einander unabhängig sind; oder auch

$$R=0$$
$$R=0,\quad \frac{dR}{da_0}=0$$
$$R=0,\quad \frac{dR}{da_0}=0,\quad \frac{d^2R}{da_0^2}=0$$
u. s. f.

unter der Voraussetzung, dass die Coefficienten der Function $f(x)$ unabhängig von einander sind.

§. 12. Product aller Differenzen von gegebenen Grössen.

1. Das Product der Differenzen, welche man erhält, indem man in der Reihe von n gegebenen Grössen $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ jede Grösse von allen folgenden subtrahirt, werde durch

$$\begin{aligned} P(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n) = (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1) &.. (\alpha_n-\alpha_1) \\ (\alpha_3-\alpha_2) &.. (\alpha_n-\alpha_2) \\ &... \\ &(\alpha_n-\alpha_{n-1}) \end{aligned}$$

bezeichnet. Dieses Product gleicht der Determinante n^{ten} Grades

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & .. & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & .. & \alpha_2^{n-1} \\ . & . & . & & \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & .. & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \text{*)}.$$

Beweis. Diese Determinante ist eine ganze rationale Function der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ und verschwindet, wenn zwei derselben einander gleich werden (§. 2, 4); daher ist sie durch das Product $(\alpha_2-\alpha_1)$ ... theilbar. Ferner ist sowohl die Determinante, als auch das Product in Bezug auf die gegebenen Grössen $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ vom $\frac{n(n-1)}{2}$ten Grade; also ist der Quotient der Determinante durch das Product eine von $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ unabhängige Zahl und zwar die Einheit, wie man bei der Vergleichung des Anfangsglieds der Determinante mit dem Anfangsglied des Products erkennt.

Während das Product $\quad 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

*) Cauchy J. de l'éc. polyt. Cah. 17 p. 48. Den speciellen Fall
$$(b-a)(c-a)(c-b) = ab^2 - a^2b + bc^2 - b^2c + ca^2 - c^2a$$
hatte bereits Vandermonde Hist. de l'Acad. de Paris 1771 p. 369 gebraucht. Durch Entwickelung des Products ist der obige Lehrsatz von Cauchy (Anal. algébr. III §. 2 u. Note IV) bewiesen worden. Vergl. Jacobi Crelle J. 22 p. 360.

Glieder hat, unter denen viele Paare entgegengesetzt gleich sind, besteht die gleichgeltende Determinante aus $1.2.3\ldots n$ Gliedern. Vermöge des obigen Lehrsatzes hat man

bei 3	Grössen	6	statt	8	
„ 4	„	24	„	64	
„ 5	„	120	„	1024	u. s. w.

Glieder zu bilden.

2. Wenn man das Product aller Differenzen der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ mit dem Product aller Differenzen der Grössen $\beta_1, \beta_2, .., \beta_n$ multiplicirt, so erhält man ebenfalls eine Determinante n^{ten} Grades. Denn nach §. 6, 3 ist

$$P(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n).P(\beta_1, \beta_2, .., \beta_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & .. & \alpha_1^{n-1} \\ . & . & . & \\ 1 & \alpha_n & .. & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & .. & \beta_1^{n-1} \\ . & . & . & \\ 1 & \beta_n & .. & \beta_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{1,1} & .. & c_{1,n} \\ . & & .. \\ c_{n,1} & .. & c_{n,n} \end{vmatrix},$$

wenn

$$c_{i,k} = 1 + \alpha_i \beta_k + \alpha_i^2 \beta_k^2 + .. + \alpha_i^{n-1} \beta_k^{n-1} = \frac{1 - \alpha_i^n \beta_k^n}{1 - \alpha_i \beta_k} \ {}^{*)},$$

oder wenn

$$c_{i,k} = \alpha_1^{i-1} \beta_1^{k-1} + \alpha_2^{i-1} \beta_2^{k-1} + .. + \alpha_n^{i-1} \beta_n^{k-1}.$$

3. Insbesondere ist

$$[P(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n)]^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & .. & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & .. & s_n \\ . & . & . & & \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & .. & s_{2n-2} \end{vmatrix},$$

wenn

$$s_i = \alpha_1^i + \alpha_2^i + .. + \alpha_n^i.$$

In diesem Falle reducirt sich nämlich das Element $c_{i,k}$ der zu bildenden Determinante (2) auf die Summe der $(i+k-2)^{\text{ten}}$ Potenzen von den Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Allgemeiner ist

$$\Sigma [P(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m)]^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & .. & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & .. & s_m \\ . & . & . & \\ s_{m-1} & s_m & .. & s_{2m-2} \end{vmatrix} {}^{**)},$$

wenn rechts s_i die vorige Bedeutung hat und links die Summation alle Glieder umfasst, welche aus dem Anfangsgliede

$$[P(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m)]^2$$

dadurch entspringen, dass an die Stelle der Grössen

$$\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m$$

je m verschiedene aus der Reihe $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ gesetzt werden. Denn

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & .. & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & .. & s_m \\ . & . & . & \\ s_{m-1} & s_m & .. & s_{2m-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{1,1} & .. & c_{1,m} \\ . & & .. \\ c_{m,1} & .. & c_{m,m} \end{vmatrix},$$

wofern

$$c_{i,k} = s_{i+k-2} = \alpha_1^{i-1} \alpha_1^{k-1} + \alpha_2^{i-1} \alpha_2^{k-1} + .. \alpha_n^{i-1} \alpha_n^{k-1}.$$

---

*) Cauchy Exerc. d'anal. 2 p. 169.

**) Cayley Liouv. J. 11 p. 298 und Borchardt Liouv. J. 12 p 58.

Unter dieser Bedingung ist aber nach §. 6, 2

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & \cdot\cdot & c_{1,m} \\ \cdot & \cdot\cdot & \\ c_{m,1} & \cdot\cdot & c_{m,m} \end{vmatrix} = \Sigma\left(\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdot\cdot & \alpha_1^{m-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdot\cdot & \alpha_2^{m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \cdot\cdot & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix}^2\right),$$

wobei das Summenzeichen die angegebene Bedeutung hat.

4. **Lehrsatz.** Wenn $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ und $\beta_1, \beta_2, .., \beta_n$ beliebige Grössen sind, wenn $P(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n)$ und $P(\beta_1, \beta_2, .., \beta_n)$ die vorige Bedeutung haben und $\Pi_{i,k}(\alpha_i - \beta_k)$ das Product aller Differenzen ist, welche aus $\alpha_i - \beta_k$ entspringen, indem für i und k die Werthe $1, 2, .., n$ gesetzt werden, so ist

$$\frac{P(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n) \cdot P(\beta_1, \beta_2, .., \beta_n)}{\Pi_{i,k}(\alpha_i - \beta_k)} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1-\beta_1} & \frac{1}{\alpha_1-\beta_2} & \cdot\cdot & \frac{1}{\alpha_1-\beta_n} \\ \frac{1}{\alpha_2-\beta_1} & \frac{1}{\alpha_2-\beta_2} & \cdot\cdot & \frac{1}{\alpha_2-\beta_n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{1}{\alpha_n-\beta_1} & \frac{1}{\alpha_n-\beta_2} & \cdot\cdot & \frac{1}{\alpha_n-\beta_n} \end{vmatrix} \text{*)}.$$

Beweis. Man bezeichne die rechts stehende Determinante durch Δ, setze

$$\varphi(z) = (z-\beta_1)(z-\beta_2) \cdot\cdot (z-\beta_n)$$

und multiplicire die Elemente der ersten Horizontalreihe von Δ mit $\varphi(\alpha_1)$, die Elemente der zweiten Horizontalreihe mit $\varphi(\alpha_2)$ u. s. f., so geht die Determinante Δ nach §. 3, 2 in $\Delta \Pi_{i,k}(\alpha_i - \beta_k)$ über. Die Elemente dieser neuen Determinante sind ganze rationale Functionen der gegebenen Grössen vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, also ist $\Delta \Pi_{i,k}(\alpha_i - \beta_k)$ eine ganze rationale Function der gegebenen Grössen vom $n(n-1)^{\text{ten}}$ Grade. Diese Determinante verschwindet identisch, wenn die in parallelen Reihen stehenden Elemente übereinstimmen (§. 2, 4), daher ist sie durch das Product $P(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n) \cdot P(\beta_1, \beta_2, .., \beta_n)$ theilbar. Das genannte Product ist aber ebenfalls eine ganze rationale Function der gegebenen Grössen vom $n(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, folglich ist der Quotient

$$\frac{\Delta \Pi_{i,k}(\alpha_i - \beta_k)}{P(\alpha_1, .., \alpha_n) \cdot P(\beta_1, .., \beta_n)}$$

eine von den gegebenen Grössen unabhängige Zahl, welche sich durch die Betrachtung eines besondern Falles ermitteln lässt.

Wenn nämlich die Grössen β der Reihe nach den Grössen α gleich sind, so verschwinden alle diejenigen Elemente der Determinante $\Delta \Pi_{i,k}(\alpha_i - \beta_k)$, welche ausserhalb der Diagonale vom ersten zum letzten Elemente liegen. Daher reducirt sich diese Determinante auf ihr Anfangsglied (§. 2, 7), d. i. auf das Product der Differenzen

$$\begin{matrix} * & \alpha_1 - \alpha_2, & .., & \alpha_1 - \alpha_{n-1}, & \alpha_1 - \alpha_n: \\ \alpha_2 - \alpha_1, & * & , .., & \alpha_2 - \alpha_{n-1}, & \alpha_2 - \alpha_n, \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \alpha_{n-1} - \alpha_1, & \alpha_{n-1} - \alpha_2, & .., & * & , \alpha_{n-1} - \alpha_n, \\ \alpha_n - \alpha_1, & \alpha_n - \alpha_2, & .., & \alpha_n - \alpha_{n-1}, & * \end{matrix}$$

*) CAUCHY Exerc. d'anal. 2 p. 154.

welches nach (1) durch

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,[P(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)]^2$$

zu bezeichnen ist. Hieraus folgt, dass

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

der unveränderliche Werth des gesuchten Quotienten ist.

5ᵃ. Mit Hülfe des Products $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ lässt sich eine eigenthümliche Auflösung des folgenden besondern Systems linearer Gleichungen geben. Wenn

$$\begin{array}{llll} x_1 & + x_2 & + \ldots + x_n & = 1 \\ x_1\alpha_1 & + x_2\alpha_2 & + \ldots + x_n\alpha_n & = t \\ x_1\alpha_1^2 & + x_2\alpha_2^2 & + \ldots + x_n\alpha_n^2 & = t^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ x_1\alpha_1^{n-1} & + x_2\alpha_2^{n-1} & + \ldots + x_n\alpha_n^{n-1} & = t^{n-1}, \end{array}$$

so ist

$$x_i = \frac{(\alpha_1 - t)(\alpha_2 - t)\ldots(\alpha_{i-1} - t)(\alpha_{i+1} - t)\ldots(\alpha_n - t)}{(\alpha_1 - \alpha_i)(\alpha_2 - \alpha_i)\ldots(\alpha_{i-1} - \alpha_i)(\alpha_{i+1} - \alpha_i)\ldots(\alpha_n - \alpha_i)}\ ^{*)}.$$

Beweis. Die gewöhnliche Auflösung giebt (§. 9, 1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} x_i = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_{i-1} & t & \alpha_{i+1} & \ldots & \alpha_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \alpha_1^{n-1} & \ldots & \alpha_{i-1}^{n-1} & t^{n-1} & \alpha_{i+1}^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Daraus erhält man, indem man die i^{ten} Verticalreihen dieser Determinanten voranstellt und den Lehrsatz (1) anwendet,

$$x_i = \frac{P(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)}{P(\alpha_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)},$$

wovon im Zähler und im Nenner nur die obigen $n-1$ Factoren übrig bleiben.

5ᵇ. Von dem allgemeineren System linearer Gleichungen

$$\begin{array}{llll} x_1 & + x_2 & + \ldots + x_n & = u_0 \\ x_1\alpha_1 & + x_2\alpha_2 & + \ldots + x_n\alpha_n & = u_1 \\ x_1\alpha_1^2 & + x_2\alpha_2^2 & + \ldots + x_n\alpha_n^2 & = u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ x_1\alpha_1^{n-1} & + x_2\alpha_2^{n-1} & + \ldots + x_n\alpha_n^{n-1} & = u_{n-1} \end{array}$$

hat LAGRANGE **) folgende Auflösung gegeben, welche den von CAUCHY betrachteten Fall (5ᵃ) einschliesst. Man bilde

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n) \\ &= C_n + C_{n-1}z + C_{n-2}z^2 + \ldots + C_1 z^{n-1} + z^n, \end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{array}{llllll} f_{n-1}(z) = & C_{n-1} & + C_{n-2}z & + \ldots & + C_1 z^{n-2} & + z^{n-1} \\ f_{n-2}(z) = & & C_{n-2} & + \ldots & + C_1 z^{n-3} & + z^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ f_1(z) = & & & & C_1 & + z \\ f_0(z) = & & & & & 1 \end{array}$$

---

*) CAUCHY Journ. de l'éc. polyt. cah. 17 p. 78.

**) Mém. de l'acad. de Berlin 1775 p. 185, 1792 p. 248, ohne Beweis. Der hier geführte Beweis lehrt, dass die von SCHEIBNER (Berichte der sächs. Gesellschaft 1856 p. 65) gefundene Auflösung des obigen Systems von LAGRANGE's Auflösung nicht verschieden ist.

endlich noch die derivirte Function $f'(z)$, so ist

$$x_i f'(\alpha_i) = u_0 f_{n-1}(\alpha_i) + u_1 f_{n-2}(\alpha_i) + \ldots + u_{n-2} f_1(\alpha_i) + u_{n-1}.$$

Beweis. Wenn man $f_{n-1}(z)$, $f_{n-2}(z)$,.. der Reihe nach mit $1, t, t^2$,.. multiplicirt und die Producte addirt, so hat C_{n-k} in der Summe den Coefficienten

$$z^{k-1} + z^{k-2} t + \ldots + z t^{k-2} + t^{k-1} = \frac{z^k - t^k}{z-t},$$

folglich ist

$$f_{n-1}(z) + t f_{n-2}(z) + t^2 f_{n-3}(z) + \ldots + t^{n-1} = \frac{f(z) - f(t)}{z-t}.$$

Aus dieser Identität folgt das System

$$f_{n-1}(z) + \alpha_1 f_{n-2}(z) + \ldots + \alpha_1^{n-1} = \frac{f(z)}{z-\alpha_1}$$
$$f_{n-1}(z) + \alpha_2 f_{n-2}(z) + \ldots + \alpha_2^{n-1} = \frac{f(z)}{z-\alpha_2}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f_{n-1}(z) + \alpha_n f_{n-2}(z) + \ldots + \alpha_n^{n-1} = \frac{f(z)}{z-\alpha_n}.$$

Indem man diese Gleichungen der Reihe nach mit $x_1, x_2, .., x_n$ multiplicirt und dann summirt, erhält man vermöge der gegebenen Gleichungen

$$u_0 f_{n-1}(z) + u_1 f_{n-2}(z) + \ldots + u_{n-1} = f(z) \left\{ \frac{x_1}{z-\alpha_1} + \frac{x_2}{z-\alpha_2} + \ldots + \frac{x_n}{z-\alpha_n} \right\}.$$

Demnach erscheinen $x_1, x_2, .., x_n$ als die Zähler der Partialbrüche, in welche man die gebrochene Function

$$\frac{u_0 f_{n-1}(z) + u_1 f_{n-2}(z) + \ldots + u_{n-1}}{f(z)}$$

zerlegen kann. Diese Zähler sind bekanntlich

$$\frac{\varphi(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}, \frac{\varphi(\alpha_2)}{f'(\alpha_2)}, .., \frac{\varphi(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)},$$

wenn $\varphi(z)$ den Zähler der gebrochenen Function bedeutet.

Wenn insbesondere $u_0 = 1$, $u_1 = t$, $u_2 = t^2$,.., so wird

$$\varphi(z) = \frac{f(t) - f(z)}{t-z},$$
$$\varphi(\alpha_i) = \frac{f(t)}{t-\alpha_i},$$

in Uebereinstimmung mit (5ᵃ).

6. Die Resultante des analogen Systems von $n+1$ linearen Gleichungen für dieselben n Unbekannten

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_2 \quad + \ldots + x_n \quad &= u_0 \\ x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \ldots + x_n \alpha_n &= u_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad & \\ x_1 \alpha_1^n + x_1 \alpha_2^n + \ldots + x_n \alpha_n^n &= u_n \end{aligned}$$

ist nach §. 9, 3

$$\text{(I)} \qquad \begin{vmatrix} u_0 & 1 & \ldots & 1 \\ u_1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ u_2 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ u_n & \alpha_1^n & \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = 0.$$

Einfacher findet man dieselbe Resultante durch die Bemerkung, dass

$$(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n) = z^n + C_1 z^{n-1} + C_2 z^{n-2} + \ldots C_n,$$

worin C_m die mit dem Zeichen $(-1)^m$ genommene Summe der Producte von je m verschiedenen Grössen der Reihe $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ bedeutet; dass folglich

$$C_n + C_{n-1}\alpha_i + C_{n-2}\alpha_i^2 + \ldots + C_1\alpha_i^{n-1} + \alpha_i^n$$

identisch verschwindet. Wenn man daher die gegebenen Gleichungen der Reihe nach mit

$$C_n, C_{n-1}, .., C_2, C_1, 1$$

multiplicirt und dann addirt, so erhält man die Resultante derselben

$$\text{(II)} \qquad C_n u_0 + C_{n-1} u_1 + \ldots + C_2 u_{n-2} + C_1 u_{n-1} + u_n = 0.$$

Die Vergleichung der Coefficienten von u_i in (I) und (II) ergiebt die Identität

$$\begin{vmatrix} 1 & .. & 1 \\ \alpha_1 & .. & \alpha_n \\ . & & . \\ \alpha_1^{i-1} & .. & \alpha_n^{i-1} \\ \alpha_1^{i+1} & .. & \alpha_n^{i-1} \\ . & & . \\ \alpha_1^n & .. & \alpha_n^n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} C_{n-i} P(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n).$$

7. Eine ganze homogene Function von 2 Variablen x, y und vom m^{ten} Grade

$$\sum_r a_r \binom{m}{r} x^{m-r} y^r,$$

worin $r = 0, 1, 2, .., m$ zu setzen ist und $\binom{m}{r}$ den r^{ten} Binomialcoefficienten in Bezug auf den Exponenten m bedeutet, kann bei ungeradem m im Allgemeinen in die Form

$$\sum_i (p_i x + q_i y)^m$$

gebracht werden, worin $i = 1, 2, .., \frac{m+1}{2}$ zu setzen ist*). Denn die $m+1$ Coefficienten $p_1, p_2, .., q_1, q_2, ..$ lassen sich durch die $m+1$ gegebenen Grössen a_0, $a_1, ..$ im Allgemeinen vollständig bestimmen. Dagegen würde bei geradem m, wenn man $i = 1, 2, .., \frac{m}{2} + 1$ setzte, von den $m+2$ Coefficienten $p_1, p_2, .., q_1$, $q_2, ..$ einer unbestimmt bleiben.

Um die Function

$$a_0 x^{2n-1} + a_1\binom{2n-1}{1} x^{2n-2} y + \ldots + a_{2n-2}\binom{2n-1}{2n-2} x y^{2n-2} + a_{2n-1} y^{2n-1}$$

in die Form

$$(p_1 x + q_1 y)^{2n-1} + (p_2 x + q_2 y)^{2n-1} + .. (p_n x + q_n y)^{2n-1}$$

zu bringen, setze man nach Sylvester (l. c.)

$$q_i = p_i \alpha_i, \quad p_i^{2n-1} = b_i,$$

und erhält die Bedingungen

$$\begin{aligned} a_0 &= b_1 + b_2 + \ldots + b_n \\ a_1 &= b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + \ldots + b_n \alpha_n \\ a_2 &= b_1 \alpha_1^2 + b_2 \alpha_2^2 + \ldots + b_n \alpha_n^2 \\ &\;\;. \\ a_{2n-1} &= b_1 \alpha_1^{2n-1} + b_2 \alpha_2^{2n-1} + \ldots + b_n \alpha_n^{2n-1}. \end{aligned}$$

---

*) Sylvester (Philos. Mag. 1851, II p. 391) hat diesen Ausdruck die canonische Form der Function genannt. Ueber die canonische Form einer ganzen homogenen Function von 2 Variablen geraden Grades hat Sylvester a. a. O. und Cambr. and Dublin math. J. 9 p. 93 weitere Untersuchungen angestellt.

Indem man die Grössen $b_1, b_2, .., b_n$ aus der ersten und den n folgenden Gleichungen nach (6) eliminirt, erhält man

$$C_n a_0 + C_{n-1} a_1 + .. + C_2 a_{n-2} + C_1 a_{n-1} + a_n = 0.$$

Ebenso leitet man aus der zweiten und den n folgenden Gleichungen u. s. f. die neuen Gleichungen ab:

$$\begin{array}{l} C_n a_1 + C_{n-1} a_2 + .. + C_2 a_{n-1} + C_1 a_n + a_{n+1} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ C_n a_{n-1} + C_{n-1} a_n + .. + C_2 a_{2n-3} + C_1 a_{2n-2} + a_{2n-1} = 0. \end{array}$$

Wenn aber z einen der Werthe $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ hat, so ist

$$C_n + C_{n-1} z + .. + C_2 z^{n-2} + C_1 z^{n-1} + z^n = 0.$$

Die Resultante dieser $n+1$ in Bezug auf $C_n, C_{n-1}, ..$ linearen Gleichungen ist (§. 9, 3)

$$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & .. & z^n \\ a_0 & a_1 & a_2 & .. & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & .. & a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & .. & a_{2n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung findet man die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$. Die linke Seite der Gleichung kann nach §. 3, 4 in

$$\begin{vmatrix} 1 & z-z & .. & z^n - z^n \\ a_0 & a_1 - a_0 z & .. & a_n - a_{n-1} z \\ a_1 & a_2 - a_1 z & .. & a_{n+1} - a_n z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{n-1} & a_n - a_{n-1} z & .. & a_{2n-1} - a_{2n-2} z \end{vmatrix}$$

folglich nach §. 2, 5 in

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_0 z & .. & a_n - a_{n-1} z \\ a_2 - a_1 z & .. & a_{n+1} - a_n z \\ \cdot & .. & \\ a_n - a_{n-1} z & .. & a_{2n-1} - a_{2n-2} z \end{vmatrix}$$

verwandelt werden. Nachdem $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ bestimmt sind, findet man die Grössen $b_1, b_2, .., b_n$ aus den ersten n Gleichungen des oben stehenden Systems (5^b), wobei die für die Reductibilität der gegebenen Function nothwendige Bedingung sich ergiebt, dass die Wurzeln jener Gleichung $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ sämmtlich von einander verschieden seien.

8. Wenn $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + .. + a_n x^n$$

und $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind, so ist nach §. 11, 1

$$\prod_{i,k} (\alpha_i - \alpha_k) = 0,$$

wobei k und i verschiedene Werthe aus der Reihe $1, 2, .., n$ haben, die nothwendige und genügende Bedingung dafür, dass irgend zwei unter den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$ einander gleich seien. Das Product aus allen positiven und negativen Wurzeldifferenzen, wofür nach (3)

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} [P(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n)]^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & .. & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & .. & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ s_{n-1} & s_n & .. & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

gesetzt werden kann, wird neuerlich **die Determinante der Gleichung** $f(x)=0$ *) genannt, weil durch das Verschwinden derselben das Vorhandensein gleicher Wurzeln der Gleichung angezeigt wird, und aus dem Zeichen derselben, wenn sie nicht verschwindet, sich schliessen lässt, dass unter den Quadraten der Wurzeldifferenzen eine ungerade oder gerade Anzahl negativ sei, d. h. dass die Gleichung eine ungerade oder gerade Anzahl von Paaren complexer Wurzeln habe.

9. Um die Determinante der Gleichung $f(x)=0$ als rationale ganze Function der Grössen

$$\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

darzustellen, kann man die Summen der ersten, zweiten, dritten, .. Potenzen der Wurzeln, d. i. $s_1, s_2, \ldots, s_{2n-2}$ durch die gegebenen Grössen ausdrücken **), oder man kann die Determinante

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

so transformiren, dass die von Newton ***) zwischen $s_0, s_1, s_2, \ldots$ aufgestellten Relationen zur Elimination dieser Grössen führen. Zu diesem letztern Zwecke verwandele man die gegebene Determinante n^{ten} Grades in die Determinante $(2n-2)^{\text{ten}}$ Grades (§. 2, 6)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_0 & s_1 & s_2 \cdots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ 0 & s_0 & s_1 & \cdots & & & & s_{2n-4} \\ s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & & & & s_{2n-3} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & & & & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

Nun addire man zur 2ten Verticalreihe die mit $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ multiplicirte erste Verticalreihe (§. 3, 4); zur 3ten Verticalreihe die mit $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ multiplicirte 2te und die mit $\frac{a_{n-2}}{a_n}$ multiplicirte 1te Verticalreihe; zur 4ten Verticalreihe die mit $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ multiplicirte 3te, die mit $\frac{a_{n-2}}{a_n}$ multiplicirte 2te und die mit $\frac{a_{n-3}}{a_n}$ multiplicirte 1te Verticalreihe u. s. f. Dadurch erhält man

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix} a_n^{2n-2} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots \\ 0 & 0 & a_n & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & a_n s_0 & a_n s_1 + a_{n-1} s_0 & \cdots \\ a_n s_0 & a_n s_1 + a_{n-1} s_0 & a_n s_2 + a_{n-1} s_1 + a_{n-2} s_0 & \cdots \\ a_n s_1 & a_n s_2 + a_{n-1} s_1 & a_n s_3 + a_{n-1} s_2 + a_{n-2} s_1 & \cdots \end{vmatrix}$$

---

*) Z. B. Salmon higher plane curves p. 296.

**) Mit Hülfe der von Girard 1629 gegebenen Formeln. Vergl. Klügel math. Wörterbuch art. Algebra p. 56.

***) Arithm. univers. ed. 's Gravesande p. 192.

Die Elemente dieser Determinante sind mit Hülfe der Identitäten

$$\begin{aligned} n a_n &= a_n s_0 \\ (n-1) a_{n-1} &= a_n s_1 + a_{n-1} s_0 \\ (n-2) a_{n-2} &= a_n s_2 + a_{n-1} s_1 + a_{n-2} s_0 \\ (n-3) a_{n-3} &= a_n s_3 + a_{n-1} s_2 + a_{n-2} s_1 + a_{n-3} s_0 \\ &\cdots \end{aligned}$$

so ausdrückbar, dass in jedem Elemente nur einer der Coefficienten $a_0, a_1, .., a_n$ in erster Potenz vorkommt.

Man erkennt hieraus, dass **die Determinante der Gleichung** $f(x)=0$ **eine ganze rationale Function** $(2n-2)^{\text{ten}}$ **Grades der Grössen**

$$\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, .., \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

ist, welche durch Multiplication mit a^{2n-2} **homogen wird** *).

10. Wenn $f(x)$ durch $(x-\alpha_k)^k$ theilbar ist, so ist die derivirte Function $f'(x)$ durch $(x-\alpha_k)^{k-1}$ theilbar, ferner $f''(x)$ durch $(x-\alpha_k)^{k-2}$ u. s. f. Sobald daher α_k eine $k$fache Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ ist, so haben die Gleichungen

$$f(x)=0, \ f'(x)=0, \ f''(x)=0, .., \ f^{(k-1)}(x)=0$$

die gemeinschaftliche Wurzel α_k, welche $(k-1)$mal in $f'(x)=0$, $(k-2)$mal in $f''(x)=0$ u. s. f. vorkommt.

Ist nun unter der Voraussetzung, dass mit $f(x)$ und $f'(x)$ nicht zugleich $f''(x)$ verschwindet, $R=0$ die Resultante der Gleichungen $f(x)=0$ und $f'(x)=0$, so ist R von der Determinante der Gleichung $f(x)=0$ nur durch einen von $\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, .., \frac{a_{n-1}}{a_n}$ unabhängigen Factor unterschieden. Die Grösse R ist nämlich eine ganze rationale Function der Grössen

$$\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, .., \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

und zwar von niederem als $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grade, weil vermöge der gegebenen Gleichungen $f(x)=0$ und $f'(x)=0$ die Coefficienten von $f(x)$ nicht unabhängig von einander sind (Vergl. §. 11, 2—4). Man kann aber $R=0$ als die Resultante der Gleichungen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$f'(x)=0 \text{ und } nf(x)-xf'(x)=0$$

betrachten, weil mit $f'(x)$ und $nf(x)-xf'(x)$ zugleich auch $f(x)$ verschwindet. Die Coefficienten jeder dieser Gleichungen sind von einander unabhängig, also ist R eine ganze rationale Function der Grössen

$$\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, .., \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

vom $(2n-2)^{\text{ten}}$ Grade (§. 11, 4). Die Determinante der Gleichung $f(x)=0$ ist ebenfalls eine ganze rationale Function der Grössen

$$\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, .., \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

---

*) Diese Bemerkung ist zum Theil von Joachimsthal Crelle J. 33 p. 371, vollständig von Jacobi Crelle J. 40 p. 244 gemacht worden.

vom $(2n-2)^{ten}$ Grade (9). Nun kann die Determinante der Gleichung $f(x)=0$ nicht verschwinden, ohne dass 2 Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ einander gleich wären, ohne dass die Gleichungen $f(x)=0$ und $f'(x)=0$ eine Wurzel gemein hätten, ohne dass R verschwände. Also kann die Determinante der Gleichung $f(x)=0$ von R nur durch einen von den Verhältnissen der Coefficienten von $f(x)$ unabhängigen Factor sich unterscheiden.

In der That trifft das in (9) zur Bildung der Determinante der Gleichung $f(x)=0$ angegebene Verfahren vollständig zusammen mit der Methode, durch welche Euler und Bézout die Resultante der Gleichungen

$$f'(x)=0 \text{ und } nf(x)-xf'(x)=0$$

gebildet haben (§. 11, 4). Durch Anwendung des verkürzten Eliminationsverfahrens von Bézout (§. 11, 5) findet man die gesuchte Determinante in gedrängterer Gestalt. Die besondern Formen, welche man für die Determinanten der Gleichungen von besondern Graden aufgestellt hat, findet man in einer Abhandlung Tortolini's (Annali di sc. matem. Roma 1855 Novembre).

11. Anstatt der Function $f(x)$ kann man die homogene Function

$$\varphi(x,y)=a_0\,y^n+a_1 y^{n-1}x+\ldots+a_{n-1}\,y x^{n-1}+a_n\,x^{n-1}$$

oder

$$\varphi(x,y)=b_0\,y^n+\binom{n}{1}b_1\,y^{n-1}\,x+\binom{n}{2}b_2\,y^{n-2}\,x^2+\ldots+b_n\,x^n$$

in Betracht nehmen, mit welcher $f(x)$ identisch wird, wenn $y=1$ *). Die Binomialcoefficienten werden den Coefficienten der Function als Factoren beigegeben, damit die Gleichheit von allen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ oder $\varphi(x,y)=0$ in dem Falle stattfinde, dass

$$b_0,\, b_1,\, b_2,\ldots,\, b_n$$

eine geometrische Progression bilden. Wenn $f(x)$ durch $\varphi(x,1)$ ersetzt wird, so erhält man statt $f'(x)$

$$\frac{\partial\varphi(x,1)}{\partial x},$$

und da nach Euler's Theorem

$$n\,\varphi(x,y)=x\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}$$

ist, anstatt $nf(x)-xf'(x)$

$$\frac{\partial\varphi(x,1)}{\partial y},$$

indem man nach der Differentiation $y=1$ setzt. Ist $R=0$ die Resultante der Gleichungen

$$\frac{\partial\varphi(x,1)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\varphi(x,1)}{\partial y}=0,$$

so ist nach (10) R, abgesehen von einem bestimmten numerischen Factor, die Determinante der Gleichung $\varphi(x,1)=0$ **).

---

*) Dieses wichtige Hülfsmittel der Analysis ist von Plücker Syst. der analyt. Geom. §. 1, 7, Hesse Crelle J. 28 p. 102, Joachimsthal Crelle J. 33 p. 373, Jacobi Crelle J. 40 p. 247 und Andern, für den gegenwärtigen Zweck von Salmon higher plane curves p. 296 gebraucht worden.

**) Sind $u_1, u_2, \ldots, u_n$ die partiellen Differentialquotienten der homogenen Function u von n Variablen; ist $R=0$ die Resultante der Gleichungen $u_1=0$, $u_2=0,\ldots, u_n=0$, so wird R

Analog findet man statt der Bedingungen für 3 gleiche Wurzeln ($f(x)=0$, $f'(x)=0$, $f''(x)=0$) die Bedingungen

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, 1)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi(x, 1)}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi(x, 1)}{\partial y^2} = 0,$$

für 4 gleiche Wurzeln

$$\frac{\partial^3 \varphi(x, 1)}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial^3 \varphi(x, 1)}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 \varphi(x, 1)}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \varphi(x, 1)}{\partial y^3} = 0,$$

u. s. w.

12. Die Determinante der Gleichung $f(x)=0$ ist das bekannte Glied der Gleichung, deren Wurzeln die Differenzen zwischen den Wurzeln der gegebenen Gleichung sind *).

Wenn x durch die Gleichung $f(x)=0$ die Werthe

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

erhält, so erhält u durch die Gleichung $f(x+u)=0$ die Werthe

$$\alpha_1 - x, \alpha_2 - x, \ldots, \alpha_n - x.$$

Demnach erhält u durch die beiden Gleichungen $f(x+u)=0$ und $f(x)=0$ alle Werthe, welche aus $\alpha_i - \alpha_k$ entspringen, indem man für i und k alle Glieder der Reihe $1, 2, \ldots, n$ setzt. Ist nun $V(u)=0$ die Resultante der Gleichungen $f(x)=0$ und $f(x+u)=0$, so ist $V(u)$ eine ganze rationale Function von u vom nn^{ten} Grade (§. 11, 2), weil die Coefficienten von x in $f(x+u)$ den n^{ten} Grad in Bezug auf u erreichen und nicht übersteigen. $V(u)$ verschwindet, wenn u einen der n^2 Werthe $\alpha_i - \alpha_k$ hat, folglich ist $V(u)=0$ die gesuchte Gleichung für die Differenzen der Wurzeln von $f(x)=0$.

Weil die Differenz $\alpha_i - \alpha_k$ verschwindet, sobald $k=i$ wird, so verschwinden n Wurzeln der Gleichung $V(u)=0$, d. h. $V(u)$ ist durch u^n theilbar. Die übrigen Wurzeln dieser Gleichung sind im Allgemeinen von Null verschieden und paarweise entgegengesetzt, also ist

$$\frac{V(u)}{u^n}$$

eine gerade Function $n(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von u, oder eine Function $\frac{n(n-1)}{2}^{\text{ten}}$ Grades von u^2.

Da nach Taylor's Theorem

$$f(x+u) = f(x) + u f'(x) + \frac{u^2}{1.2} f''(x) + \ldots$$
$$= f(u) + x f'(u) + \frac{x^2}{1.2} f''(u) + \ldots$$

---

von Sylvester (Philos. Mag. 1851, II p. 406) die Discriminante der homogenen Function u genannt.

*) Diese unter dem Namen »équation aux carrés des différences« bekannte Gleichung ist von Waring (Misc. analyt. 1762) bei der Untersuchung der Wurzeln einer gegebenen Gleichung gebraucht worden. In den Philos. Transact. 1763 p. 294 hat Waring die Gleichungen für die Wurzeldifferenzen der Gleichungen 4ten und 5ten Grades nebst den daraus folgenden Kennzeichen für die Realität der Wurzeln von den letzteren Gleichungen ohne Beweis mitgetheilt. Ausführlich ist die Gleichung für die Wurzeldifferenzen einer gegebenen Gleichung von Lagrange behandelt worden (Hist. de l'Acad. de Berlin 1767 p. 311 art. 8. Résol. des équat. art. 8 u. 96.

ist, so erscheint $V(u) = 0$ als Resultante der Gleichungen

$$0 = f(x)$$
$$0 = f(u) + x\, f'(u) + \frac{x^2}{1.2} f''(u) + \ldots + a_n\, x^n,$$

und

$$\frac{V(u)}{u^n} = 0$$

als Resultante der Gleichungen

$$0 = f(x)$$
$$0 = f'(x) + \frac{u}{1.2} f''(x) + \frac{u^2}{1.2.3} f'''(x) + \ldots + a_n\, u^{n-1}.$$

Wenn man hierin $u = 0$ setzt, so behält man die Resultante der Gleichungen $f(x) = 0$ und $f'(x) = 0$, d. h. die Bedingung, unter welcher wenigstens zwei Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ einander gleich sind (10).

§. 13. Die Functionaldeterminanten.

1. Wenn n Functionen $f_1, f_2, .., f_n$ der n Variablen $x_1, x_2, .., x_n$ gegeben sind und $f_{i,k}$ den partiellen Differentialquotienten von f_i in Bezug auf die Variable x_k bedeutet, so dass

$$f_{i,k} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k},$$

so heisst die Determinante n^{ten} Grades

$$R = \begin{vmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdot\cdot & f_{1,n} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdot\cdot & f_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ f_{n,1} & f_{n,2} & \cdot\cdot & f_{n,n} \end{vmatrix}$$

die Determinante des Systems der gegebenen Functionen oder die Functionaldeterminante des Systems*). Dieselbe reducirt sich auf eine Determinante niederen Grades, wenn z. B. f_1 nur von x_1, f_2 nur von x_1 und x_2 abhängig ist (§. 2, 5). Von der Functionaldeterminante bleibt nur das Anfangsglied übrig, wenn f_1 eine Function von x_1, f_2 eine Function von x_1 und x_2, f_3 eine Function von x_1, x_2 und x_3 u. s. f. ist (§. 2, 7).

2. Wenn man die Functionen $f_1, f_2, .., f_n$ so ordnet und bezeichnet, dass in f_1 die Variable x_1, in f_2 die Variable x_2 u. s. f. in f_{n-1} die Variable x_{n-1} nicht fehlt, so kann man umgekehrt x_1 als Function von $f_1, x_2, .., x_n$ betrachten, x_2 als Function von $f_1, f_2, x_3, .., x_n$ u. s. f. Demnach erscheint, wenn auch im Allgemeinen nur implicite,

$$\begin{array}{llll} f_1 & \text{als Function von} & x_1, x_2, x_3, .. & , x_n \\ f_2 & \ldots\ldots & f_1, x_2, x_3, .. & , x_n \\ f_3 & \ldots\ldots & f_1, f_2, x_3, .. & , x_n \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & & & \\ f_n & \ldots\ldots & f_1, f_2, f_3, .., f_{n-1}, & x_n. \end{array}$$

Indem man die partiellen Differentialquotienten der so transformirten Functionen von denen der gegebenen Functionen durch hinzugefügte Klammern unter-

*) Jacobi de determ. functionalibus (Crelle J. 22 p. 319) §. 5.

scheidet, erhält man die Functionaldeterminante des gegebenen Systems in Form des Products

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\cdot\cdot\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)\text{*)},$$

worin $\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)$ von $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ sich nicht unterscheidet, während $\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)$ von $\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ dadurch unterschieden ist, dass f_2 im ersteren Falle als Function von $f_1, x_2, .., x_n$, im letzteren Falle als Function von $x_1, x_2, .., x_n$ betrachtet wird u. s. w.

Beweis. Nach der über f_i gemachten Voraussetzung ist

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial f_1}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}\right)+\left(\frac{\partial f_i}{\partial f_2}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_k}\right)+\cdot\cdot+\left(\frac{\partial f_i}{\partial f_{i-1}}\right)\left(\frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_k}\right)+\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right).$$

Daher ist nach §. 6, 1

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial f_1}\right) & 1 & 0 & . \\ \left(\frac{\partial f_3}{\partial f_1}\right) & \left(\frac{\partial f_3}{\partial f_2}\right) & 1 & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) & 0 & 0 & . \\ \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) & 0 & . \\ \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right) & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) & \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix}.$$

Diese beiden Determinanten reduciren sich auf ihre Anfangsglieder (§. 2, 7); die eine hat den Werth 1, die andere ist dem oben angegebenen Producte gleich.

3. **Lehrsatz.** Wenn die Determinante R des Systems der Functionen $f_1, f_2, .., f_n$ identisch verschwindet, so sind die gegebenen Functionen von einander nicht unabhängig, und umgekehrt **).

Beweis. Wenn die Determinante R identisch verschwindet, so muss von dem Product (2)

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\cdot\cdot\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)$$

ein Factor identisch verschwinden, z. B. $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)$, d. h. f_i ist bei der oben beschriebenen Transformation unabhängig von x_i geworden. Folglich ist x_{i+1} ausdrückbar durch $f_1, f_2, .., f_i, x_{i+2}, .., x_n$, daher f_{i+1} eine Function von $f_1, f_2, .., f_i, x_{i+2}, .., x_n$, so dass auch $\left(\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{i+1}}\right)$ identisch verschwindet. Ebenso schliesst man weiter, dass

$$\left(\frac{\partial f_{i+2}}{\partial x_{i+2}}\right), .., \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)$$

identisch verschwinden, d. h. dass f_n durch $f_1, f_2, .., f_{n-1}$ ausdrückbar sei, w. z. b. w.

Umgekehrt, wenn die gegebenen Functionen nicht unabhängig von einander sind, sondern z. B. f_n durch $f_1, f_2, .., f_{n-1}$ allein ohne x_n ausdrückbar ist, so verschwindet $\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)$ identisch, folglich auch R.

Besondere Fälle. Wenn $f_1, f_2, .., f_n$ lineare Functionen von $x_1, x_2, .., x_n$ sind, so ist die Determinante ihres Systems von der Determinante der linearen Gleichungen (§. 9, 1)

$$f_1 = u_1,\ f_2 = u_2, .., f_n = u_n$$

*) Jacobi det. funct. §. 8. **) Jacobi det. funct. §. 6 u. 7.

nicht verschieden. In dem Falle, dass diese Determinante verschwindet, ist von den gegebenen Functionen eine durch die andern vermöge einer linearen Gleichung von der Form

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = 0$$

ausdrückbar und die gegebenen Gleichungen sind nicht unabhängig von einander (§. 9, 2).

Wenn $f_1, f_2, \ldots, f_n$ die partiellen Differentialquotienten einer Function F bedeuten, so ist die Functionaldeterminante R einerlei mit der Determinante der zweiten partiellen Differentialquotienten von F und wird von Hesse (Crelle J. 28 p. 83) als die Determinante von F kurz bezeichnet. Derselben Functionaldeterminante hat Sylvester (Cambr. and Dublin math. J. 6 p. 186) den Namen »Hessian of F« gegeben. Sind insbesondere die partiellen Differentialquotienten von F durch eine lineare Gleichung von der Form

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = 0$$

verbunden, so verschwindet die Determinante von F identisch und F geht durch die lineare Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{1,1} y_1 + \ldots + b_{1,n-1} y_{n-1} + c_1 y_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n &= b_{n,1} y_1 + \ldots + b_{n,n-1} y_{n-1} + c_n y_n \end{aligned}$$

in eine Function der Variablen $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ über, weil

$$\frac{\partial F}{\partial y_n} = f_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_n} + \ldots + f_n \frac{\partial x_n}{\partial y_n} = c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n = 0.$$

Vergl. Hesse Crelle J. 42 p. 117.

4. Wenn U eine gegebene Function der Grössen $f_1, f_2, \ldots, f_n$, jede derselben eine gegebene Function der Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist, wenn ferner R die Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,n} \\ \cdot & & \cdot \\ f_{n,1} & \cdots & f_{n,n} \end{vmatrix}$$

bedeutet, so ist das vielfache Integral

$$\int U \, df_1 \, df_2 \ldots df_n$$

dem absoluten Werthe des Integrals

$$\int U R \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n$$

gleich, wobei die Grenzen der neuen Integrationen aus den gegebenen Grenzen der ursprünglichen Integrationen zu bestimmen sind *).

---

*) Die Transformation eines zweifachen Integrals ist zuerst von Euler 1759 Nov. Comm. Petrop. 14, I p. 72 gezeigt worden. Bald darauf hat Lagrange Mém. de l'Acad. de Berlin 1773 p. 125 die Transformation eines dreifachen Integrals nach einer allgemein anwendbaren Methode ausgeführt. Die Transformation eines vielfachen Integrals im Allgemeinen rührt von Jacobi her (Crelle J. 12 p. 38, det. funct. §. 19).

Beweis. Stellt man zunächst wie oben (2)

$$\begin{array}{llll} f_1 & \text{als Function von} & x_1, x_2, x_3, .., & x_n \\ f_2 & ,, \quad . \quad . \quad . & f_1, x_2, x_3, .., & x_n \\ f_3 & . \quad . \quad ,, \quad . \quad . & f_1, f_2, x_3, .., & x_n \\ . & . \quad . & & \\ f_n & . \quad . \quad . \quad . \quad . & f_1, f_2, .., & f_{n-1}, x_n \end{array}$$

vor und unterscheidet man die partiellen Differentialquotienten der transformirten Functionen durch beigefügte Klammern, so kann man die neuen Variablen nach und nach in das gegebene Integral einführen wie folgt.

Indem man mit der Integration in Bezug auf f_n beginnt, hat man das Differential df_n durch $\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) dx_n$ zu ersetzen, um statt der Variablen f_n die Variable x_n einzuführen. Demnach ist

$$\int U\, df_1 .. df_n = \int U \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) df_1 .. df_{n-1}\, dx_n.$$

Wenn man die Entwickelung dieses transformirten Integrals mit der Integration in Bezug auf f_{n-1} beginnt, so hat man df_{n-1} durch $\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) dx_{n-1}$ zu ersetzen, um statt der Variablen f_{n-1} die Variable x_{n-1} einzuführen, und findet

$$\int U \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) df_1 .. df_{n-1}\, dx_n = \int U \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) df_1 .. df_{n-2}\, dx_{n-1}\, dx_n.$$

Indem man so fortfährt, erhält man endlich

$$\int U\, df_1 .. df_n = \int U \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) .. \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) dx_1 .. dx_n.$$

Das Product der künstlichen die obigen Transformationen voraussetzenden Differentialquotienten ist aber die Determinante der gegebenen Functionen $f_1, f_2, ..,$ f_n (2).

5. Zu derselben Regel gelangt man unmittelbar durch Verfolgung des Weges, den Lagrange (l. c.) bei der Transformation eines dreifachen Integrals eingeschlagen hat.

Wenn $f_1, f_2, .., f_n$ Functionen der Variablen $x_1, x_2, .., x_n$ sind, so besteht das System von linearen Gleichungen

$$\begin{array}{l} df_1 = f_{1,1}\, dx_1 + f_{1,2}\, dx_2 + \,..\, + f_{1,n}\, dx_n \\ . \quad . \quad . \\ df_n = f_{n,1}\, dx_1 + f_{n,2}\, dx_2 + \,..\, + f_{n,n}\, dx_n. \end{array}$$

Durch Auflösung desselben erhält man (§. 9, 1)

$$\varphi_{1,k}\, df_1 + \varphi_{2,k}\, df_2 + \,..\, + \varphi_{n,k}\, df_n = R_n\, dx_k,$$

wenn

$$R_n = \begin{vmatrix} f_{1,1} & .. & f_{1,n} \\ . & & .. \\ f_{n,1} & .. & f_{n,n} \end{vmatrix}$$

und $\varphi_{i,k}$ den Coefficienten von $f_{i,k}$ d. i. $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ in R_n bedeutet, so dass insbesondere $\varphi_{n,n} = R_{n-1}$ ist (§. 3, 5). Es sei nun

$$\int U\, df_1\, df_2 .. df_n$$

das zu bildende vielfache Integral und U eine gegebene Function von $f_1, f_2, .., f_n$.

Wenn man die Reihe der aufzuführenden Integrationen mit der Integration in Bezug auf f_n eröffnet, so hat man die Summe der Differentiale $U df_n$ unter der Bedingung zu suchen, dass $f_1, f_2, .., f_{n-1}$ unverändert bleiben. Unter dieser Bedingung ist in dem obigen System von linearen Gleichungen

$$df_1 = 0,\ df_2 = 0, .., df_{n-1} = 0,$$

folglich

$$R_{n-1}\, df_n = R_n\, dx_n,$$

so dass man df_n durch $\frac{R_n}{R_{n-1}} dx_n$ ersetzen kann. Folglich ist

$$\int U\, df_1 .. df_n = \int U \frac{R_n}{R_{n-1}}\, df_1 .. df_{n-1}\, dx_n,$$

wenn die Grenzen von x_n nach den gegebenen Grenzen von f_n bestimmt werden. Indem man die Entwickelung des so transformirten Integrals mit der Integration in Bezug auf die Variable f_{n-1} beginnt, hat man die Summe der Differentiale $U\frac{R_n}{R_{n-1}} df_{n-1}$ zu suchen, während $f_1, f_2, .., f_{n-2}, x_n$ unverändert bleiben. Unter dieser Voraussetzung hat man aber

$$df_1 = 0, .., df_{n-2} = 0,\ dx_n = 0,$$

mithin folgendes System von $n-1$ linearen Gleichungen:

$$\begin{array}{lcl} 0 & = & f_{1,1}\, dx_1 + .. + f_{1,n-1}\, dx_{n-1} \\ \cdot & & \cdot \qquad \cdot \\ 0 & = & f_{n-2,1}\, dx_1 + .. + f_{n-2,n-1}\, dx_{n-1} \\ df_{n-1} & = & f_{n-1,1}\, dx_1 + .. + f_{n-1,n-1}\, dx_{n-1}. \end{array}$$

Hieraus ergiebt sich wie oben

$$R_{n-2}\, df_{n-1} = R_{n-1}\, dx_{n-1},$$

so dass man df_{n-1} durch $\frac{R_{n-1}}{R_{n-2}} dx_{n-1}$ und $U\frac{R_n}{R_{n-1}} df_{n-1}$ durch $U\frac{R_n}{R_{n-2}} dx_{n-1}$ ersetzen kann. Daher ist bei der erforderlichen Begrenzung

$$\int U \frac{R_n}{R_{n-1}}\, df_1 .. df_{n-1}\, dx_n = \int U \frac{R_n}{R_{n-2}}\, df_1 .. df_{n-2}\, dx_{n-1}\, dx_n.$$

Der gefundene Ausdruck für das gesuchte vielfache Integral lässt sich durch analoge Betrachtungen transformiren, indem man zufolge eines Systems von $n-2$ linearen Gleichungen df_{n-2} durch $\frac{R_{n-2}}{R_{n-3}} dx_{n-2}$ ersetzt, wodurch

$$\int U \frac{R_n}{R_{n-2}}\, df_1 .. df_{n-2}\, dx_{n-1}\, dx_n = \int U \frac{R_n}{R_{n-3}}\, df_1 .. df_{n-3}\, dx_{n-2}\, dx_{n-1}\, dx_n$$

wird u. s. w. Endlich findet man auf demselben Wege

$$\int U \frac{R_n}{R_1}\, df_1\, dx_2 .. dx_n = \int U R_n\, dx_1\, dx_2 .. dx_n,$$

indem man zuerst in Bezug auf f_1 integrirend vermöge der Bedingungen

$$dx_2 = 0,\ dx_3 = 0, .., dx_n = 0$$

das Differential df_1 durch $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1$ d. i. $R_1\, dx_1$ ersetzt.

6. Wenn $f_1, f_2, .., f_n$ nicht unmittelbar als Functionen von $x_1, x_2, .., x_n$, sondern zunächst als Functionen der p Grössen $y_1, y_2, .., y_p$ gegeben sind, welche gegebene Functionen der Variablen $x_1, x_2, .., x_n$ sind, so findet man ihre Functionaldeterminante wie folgt *). Nach Voraussetzung ist

*) JACOBI det. funct. §. 11.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial y_p}\frac{\partial y_p}{\partial x_k},$$

also

$$c_{i,k} = a_{i,1}\, b_{1,k} + a_{i,2}\, b_{2,k} + \ldots + a_{i,p}\, b_{p,k},$$

wenn

$$c_{i,k} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k},\quad a_{i,k} = \frac{\partial f_i}{\partial y_k},\quad b_{i,k} = \frac{\partial y_i}{\partial x_k}.$$

Bezeichnet man die Determinanten der Elemente a, b durch P, Q und die gesuchte Determinante der Elemente c durch R, so ist nach §. 6, 1, wenn $p < n$,

$$R = 0,$$

d. h. wenn die gegebenen Functionen durch eine kleinere Anzahl von Functionen der Variablen ausgedrückt werden können, so verschwindet die Functionaldeterminante identisch, wie es nach dem Lehrsatz (3) zu erwarten war.

Wenn $p = n$, so ist $R = PQ$, d. h.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Wenn $p > n$, so ist $R = \Sigma PQ$, d. h.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_r} & \frac{\partial f_1}{\partial y_s} & \cdot \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_r} & \frac{\partial f_2}{\partial y_s} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial y_r}{\partial x_1} & \frac{\partial y_r}{\partial x_2} & \cdot \\ \frac{\partial y_s}{\partial x_1} & \frac{\partial y_s}{\partial x_2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}.$$

Die Glieder dieser Summe werden erhalten, indem man für die Complexion $r, s, \ldots$ alle Combinationen von je n Suffixen aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ setzt.

7. Wenn $f_1, f_2, \ldots, f_n$ nicht explicite als Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben sind, sondern implicite dadurch, dass n Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ der Variablen $f_1, f_2, \ldots, f_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$ verschwinden, so ist

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial f_1} & \cdot\cdot & \frac{\partial \varphi_n}{\partial f_n} \end{vmatrix} \; {}^{*}).$$

Beweis. Vermöge der gegebenen Gleichungen

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_n = 0$$

kann jede der Grössen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ durch die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ausgedrückt werden. Wenn man die gefundenen Werthe in der Grösse φ_i substituirt, so erhält man die Identität $\varphi_i = 0$, durch deren Differentiation in Bezug auf x_k die Identität folgt:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_k} = 0,$$

d. i.

$$c_{i,k} = b_{i,1}\, a_{1,k} + \ldots + b_{i,n}\, a_{n,k},$$

---

*) Jacobi det. funct. §. 10.

wenn

$$c_{i,k} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}, \quad b_{i,k} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial f_k}, \quad a_{i,k} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$$

gesetzt wird. Bezeichnet man die Determinanten der Elemente c, b, a durch T, S, R, so ist (§. 6, 1)

$$T = SR, \quad R = T : S$$

und zwar (§. 3, 2)

$$T = (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

8. Wenn $f_1, f_2, .., f_n$ dadurch als Functionen von $x_1, x_2, .., x_n$ gegeben sind, dass $n+p$ Functionen $\varphi_1, \varphi_2, .., \varphi_{n+p}$ der Variablen $f_1, f_2, .. f_{n+p}, x_1, x_2, .. x_n$ verschwinden, so ist*)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_{n+p}} \\ \cdot & \cdots & \cdot & & & \\ \frac{\partial \varphi_{n+p}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{n+p}}{\partial x_n} & \frac{\partial \varphi_{n+p}}{\partial f_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{n+p}}{\partial f_{n+p}} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_{n+p}} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_{n+p}}{\partial f_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{n+p}}{\partial f_{n+p}} \end{vmatrix}.$$

Beweis. Vermöge der Gleichungen

$$\varphi_{n+1} = 0, \quad \varphi_{n+2} = 0, \ldots, \varphi_{n+p} = 0$$

können $f_{n+1}, f_{n+2}, .., f_{n+p}$ durch die übrigen Grössen ausgedrückt werden, folglich sind vermöge der Gleichungen

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_n = 0$$

die Grössen $f_1, f_2, .., f_n$ durch $x_1, x_2, .., x_n$ ausdrückbar. Daher hat man (7) für $i = 1, 2, .., n+p$, solange k nicht grösser als n,

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_k} = 0,$$

d. i.

$$c_{i,k} = b_{i,1}\, a_{1,k} + \ldots + b_{i,n}\, a_{n,k},$$

wenn

$$c_{i,k} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}, \quad b_{i,k} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial f_k}, \quad a_{i,k} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$$

gesetzt wird. Wenn dagegen k grösser als n, so setze man

$$c_{i,k} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial f_k} = b_{i,k}.$$

Bezeichnet man nun die Determinanten $(n+p)^{\text{ten}}$ Grades der Elemente c und b und die Determinante n^{ten} Grades der Elemente a der Reihe nach durch T, S, R, so ist (§. 6, 4)

$$T = SR, \quad R = T : S.$$

Insbesondere ist

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial f_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial f_n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial f_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial f_n} \end{vmatrix}.$$

*) Jacobi det. funct. §. 13.

9. Wenn $f_1, f_2, .., f_n$ von einander unabhängige Functionen von $x_1, x_2, ..,$ x_n sind, so sind auch $x_1, x_2, .., x_n$ von einander unabhängige Functionen von $f_1, f_2, .., f_n$. Die Determinante des Systems $f_1, f_2, .., f_n$ und die Determinante des Systems $x_1, x_2, .., x_n$ sind reciprok, d. h. ihr Product ist $= 1$ *).

Beweis. Um f_i in Bezug auf f_k zu differentiiren, müsste man $x_1, x_2, .., x_n$ durch $f_1, f_2, .., f_n$ ausdrücken und

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial f_k}+\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial f_k}+..+\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial f_k}$$

bilden. Diese Summe beträgt aber 0 oder 1, je nachdem k von i verschieden ist oder nicht, weil $f_1, f_2, .., f_n$ von einander unabhängig sind.

Bezeichnet man $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ durch $a_{i,k}$, $\frac{\partial x_i}{\partial f_k}$ durch $b_{i,k}$ und die erwähnte Summe durch $c_{i,k}$, bezeichnet man die Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & .. & a_{1,n} \\ . & .. & \\ a_{n,1} & .. & a_{n,n}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} b_{1,1} & .. & b_{1,n} \\ . & .. & \\ b_{n,1} & .. & b_{n,n}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} c_{1,1} & .. & c_{1,n} \\ . & .. & \\ c_{n,1} & .. & c_{n,n}\end{vmatrix}$$

durch R, S, T, so ist

$$c_{i,k}=a_{i,1}\,b_{1,k}+\,..\,+a_{i,n}\,b_{n,k},$$

folglich (§. 6, 1)

$$T=RS.$$

Nun ist $c_{i,k}$ entweder 0 oder 1, je nachdem k von i verschieden ist oder nicht; folglich $T=1$ (§. 2, 7), d. h.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & .. & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ . & .. & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & .. & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial f_1} & .. & \frac{\partial x_1}{\partial f_n} \\ . & .. & \\ \frac{\partial x_n}{\partial f_1} & .. & \frac{\partial x_n}{\partial f_n}\end{vmatrix}=1.$$

10. Wenn R und S die vorige Bedeutung haben und die Coefficienten von $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ in R und von $\frac{\partial x_i}{\partial f_k}$ in S durch $\alpha_{i,k}$ und $\beta_{i,k}$ bezeichnet werden, so ist **)

$$\frac{\partial x_i}{\partial f_k}=\frac{\alpha_{k,i}}{R},\quad \frac{\partial f_i}{\partial x_k}=\frac{\beta_{k,i}}{S},$$

$$R\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial f_1} & .. & \frac{\partial x_1}{\partial f_m} \\ . & .. & \\ \frac{\partial x_m}{\partial f_1} & .. & \frac{\partial x_m}{\partial f_m}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}} & .. & \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_n} \\ . & .. & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{m+1}} & .. & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{vmatrix},$$

$$S\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & .. & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ . & .. & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x} & .. & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x_{m+1}}{\partial f_{m+1}} & .. & \frac{\partial x_{m+1}}{\partial f_n} \\ . & .. & \\ \frac{\partial x_n}{\partial f_{m+1}} & .. & \frac{\partial x_n}{\partial f_n}\end{vmatrix}.$$

Beweis. Nach den angenommenen Bezeichnungen (9) ist

$$\begin{aligned} a_{1,1}\,b_{1,k}+a_{1,2}\,b_{2,k}+\,..\,+a_{1,n}\,b_{n,k}&=0\\ . \quad . \quad . \quad & \\ a_{k,1}\,b_{1,k}+a_{k,2}\,b_{2,k}+\,..\,+a_{k,n}\,b_{n,k}&=1\\ . \quad . \quad . \quad & \\ a_{n,1}\,b_{1,k}+a_{n,2}\,b_{2,k}+\,..\,+a_{k,n}\,b_{n,k}&=0.\end{aligned}$$

*) Jacobi det. funct. §. 8. Vergl. Möbius Crelle J. 12 p. 116. **) Jacobi det. funct. §. 8 u. 9.

Wenn man diese Identitäten der Reihe nach mit

$$\alpha_{1,i},\ \alpha_{2,i}, \ldots, \alpha_{n,i}$$

multiplicirt und dann addirt, so erhält man (§. 3, 1)

$$R\, b_{i,k} = \alpha_{k,i}.$$

Ferner ist (§. 7, 2)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,m} \\ \cdot & & \cdot \\ \alpha_{m,1} & \ldots & \alpha_{m,m} \end{vmatrix} = R^{m-1} \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \ldots & a_{m+1,n} \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n,m+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Durch Substitution der eben gefundenen Werthe von $\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{m,m}$ erhält man auf der linken Seite (§. 3, 2)

$$R^m \begin{vmatrix} b_{1,1} & \ldots & b_{1,m} \\ \cdot & & \cdot \\ b_{m,1} & \ldots & b_{m,m} \end{vmatrix},$$

und damit den Inhalt der zweiten Behauptung. Die übrigen Behauptungen folgen aus den bewiesenen, indem man gleichzeitig f mit x, R mit S vertauscht.

11. Wenn t eine Grösse bedeutet, von welcher $f_1, f_2, \ldots, f_n$ auf gegebene Weise abhängen, so kann man

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}, \frac{\partial f_2}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial t}$$

bilden. Die in diesen Differentialquotienten vorkommenden Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ können durch $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ausgedrückt und dann die Differentialquotienten nach $f_1, f_2, \ldots$ differentiirt werden. Die Functionaldeterminante R (9 und 10), welche zunächst eine Function von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist, kann durch $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ausgedrückt und dann nach t differentiirt werden. Wenn andererseits u eine Variable bedeutet, von welcher $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auf gegebene Weise abhängen u. s. w., so ist nach den angenommenen Bezeichnungen *)

$$\frac{\partial \log R}{\partial t} = \frac{\partial \frac{\partial f_1}{\partial t}}{\partial f_1} + \frac{\partial \frac{\partial f_2}{\partial t}}{\partial f_2} + \ldots + \frac{\partial \frac{\partial f_n}{\partial t}}{\partial f_n}$$

$$0 = \frac{\partial \left(S \frac{\partial f_1}{\partial t}\right)}{\partial f_1} + \frac{\partial \left(S \frac{\partial f_2}{\partial t}\right)}{\partial f_2} + \ldots + \frac{\partial \left(S \frac{\partial f_n}{\partial t}\right)}{\partial f_n},$$

und analog

$$\frac{\partial \log S}{\partial u} = \frac{\partial \frac{\partial x_1}{\partial u}}{\partial x_1} + \frac{\partial \frac{\partial x_2}{\partial u}}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \frac{\partial x_n}{\partial u}}{\partial x_n}$$

$$0 = \frac{\partial \left(R \frac{\partial x_1}{\partial u}\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial \left(R \frac{\partial x_2}{\partial u}\right)}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \left(R \frac{\partial x_n}{\partial u}\right)}{\partial x_n}.$$

Insbesondere ist **)

$$0 = \frac{\partial \beta_{k,1}}{\partial f_1} + \frac{\partial \beta_{k,2}}{\partial f_2} + \ldots + \frac{\partial \beta_{k,n}}{\partial f_n}$$

$$0 = \frac{\partial \alpha_{k,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_{k,2}}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \alpha_{k,n}}{\partial x_n}.$$

Beweis. Nach §. 3, 10 hat man

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \sum_{i,k} \alpha_{i,k} \frac{\partial a_{i,k}}{\partial t},$$

---

*) Jacobi det. funct. §. 9. Vergl. Jacobi Crelle J. 27 p. 209. **) Jacobi Crelle J. 27 p. 203.

worin nach (10)

$$\alpha_{i,k} = R\frac{\partial x_k}{\partial f_i}$$

und

$$\frac{\partial \alpha_{i,k}}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial t\,\partial x_k}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial t\,\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial f_i} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial t\,\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial f_i} + \ldots + \frac{\partial^2 f_i}{\partial t\,\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial f_i} = \frac{\partial\frac{\partial f_i}{\partial t}}{\partial f_i},$$

folglich

$$\frac{\partial R}{\partial t} = R\sum_i \frac{\partial\frac{\partial f_i}{\partial t}}{\partial f_i},\quad \frac{\partial \log R}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial\frac{\partial f_i}{\partial t}}{\partial f_i}.$$

Ferner ist $RS = 1$ (9), also $\log R + \log S = 0$, und

$$0 = \frac{\partial \log S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial\frac{\partial f_i}{\partial t}}{\partial f_i}.$$

Da die Functionaldeterminante S eine Function der Grössen $f_1, f_2, .., f_n$ ist, welche die Variable t enthalten, so hat man

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial S}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial t}.$$

Nimmt man hinzu, dass

$$\frac{\partial S}{\partial f_i}\frac{\partial f_i}{\partial t} + S\frac{\partial\frac{\partial f_i}{\partial t}}{\partial f_i} = \frac{\partial\left(S\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)}{\partial f_i}$$

ist, so erhält man die zweite der aufgestellten Identitäten. Die analogen Identitäten ergeben sich durch gleichzeitige Vertauschung von t mit u, f mit x, R mit S.

Wenn insbesondere $t = x_k$, so ist (10)

$$S\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \beta_{k,i} \text{ u. s. w.}$$

12. Wenn $X, X_1, .., X_n$ gegebene Functionen von $x, x_1, .., x_n$ bedeuten, f eine unbestimmte Function derselben Variablen und

$$\psi(f) = X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

wenn ferner n von einander unabhängige Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung $\psi(f) = 0$ durch $f_1, f_2, .., f_n$ bezeichnet werden, so dass $\psi(f_1)$, $\psi(f_2), .., \psi(f_n)$ identisch verschwinden: so lässt sich ein Multiplicator M angeben, durch welchen $\psi(f)$ zur Determinante der Functionen $f, f_1, .., f_n$ wird, d. h.

$$M\psi(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

und zwar ist, wenn i ein beliebiges Suffix und A_i den Coefficienten von $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in der Functionaldeterminante bedeutet,

$$M = \frac{A_i}{X_i},$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, M ist eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung

$$0 = \frac{\partial(\mu X)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu X_1)}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial(\mu X_n)}{\partial x_n} \text{ *)}.$$

Denn aus dem System von linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} \psi(f) &= X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} \\ 0 &= X\frac{\partial f_1}{\partial x} + X_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + X_n\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 0 &= X\frac{\partial f_n}{\partial x} + X_1\frac{\partial f_n}{\partial x_1} + \ldots + X_n\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{aligned}$$

folgt (§. 9, 1)

$$\psi(f)\, A_i = X_i\, R,$$

wenn R die Determinante des linearen Systems und A_i den Coefficienten von $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in R bedeutet. Ist aber $A_i = MX_i$, so ist (11)

$$\frac{\partial(MX)}{\partial x} + \frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n} = 0.$$

Anmerkung. Die durch M bezeichnete Function der Grössen $x, x_1, \ldots, x_n$ wird nach Jacobi (l. c.) der Multiplicator der partiellen Differentialgleichung $\psi(f) = 0$, oder der partiellen Differentialgleichung

$$0 = X - X_1\frac{\partial x}{\partial x_1} - \ldots - X_n\frac{\partial x}{\partial x_n},$$

oder des Systems von gemeinen Differentialgleichungen

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n$$

genannt, weil die Auflösungen jener partiellen Differentialgleichungen und dieses Systems gemeiner Differentialgleichungen im engsten Zusammenhange stehen. Ist nämlich π eine Lösung der Gleichung $\psi(f) = 0$ und x eine Function von x_1, $x_2, \ldots, x_n$, welche dadurch bestimmt worden ist, dass man π einer willkürlichen Constante gleichgesetzt hat, so hat man

$$0 = X\frac{\partial \pi}{\partial x} + X_1\frac{\partial \pi}{\partial x_1} + \ldots + X_n\frac{\partial \pi}{\partial x_n},$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_i} + \frac{\partial \pi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} : \frac{\partial \pi}{\partial x_1} : \frac{\partial \pi}{\partial x_2} : \ldots = 1 : -\frac{\partial x}{\partial x_1} : -\frac{\partial x}{\partial x_2} : \ldots,$$

folglich

$$0 = X - X_1\frac{\partial x}{\partial x_1} - \ldots - X_n\frac{\partial x}{\partial x_n}.$$

Sind andrerseits $f_1, f_2, \ldots, f_n$ von einander unabhängige Lösungen der Gleichung $\psi(f) = 0$ und werden dieselben willkürlichen Constanten gleichgesetzt, so hat man

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}dx_n = 0 \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &\frac{\partial f_n}{\partial x}dx + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}dx_n = 0 \end{aligned}$$

---

*) Jacobi Crelle J. 27 p. 210.

und durch Auflösung dieses linearen Systems

$$dx : dx_1 : dx_2 : .. = A : A_1 : A_2 : ..$$
$$= X : X_1 : X_2 : ...$$

§. 14. Lehrsätze von den homogenen Functionen.

1. Wenn u eine homogene Function m^{ten} Grades der Variablen $x_1, x_2, .., x_n$ ist, wenn man $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ durch u_i bezeichnet, so ist nach EULER's Theorem *)

$$mu = u_1 x_1 + .. + u_n x_n.$$

Indem man denselben Satz auf die homogenen Functionen $u_1, u_2, .., $ von $m-1$ Dimensionen anwendet und $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$ durch $u_{i,k}$ bezeichnet, erhält man das System von Identitäten **)

$$(m-1)\, u_1 = u_{1,1}\, x_1 + .. + u_{n,1}\, x_n$$
$$. \quad . \quad .$$
$$(m-1)\, u_n = u_{1,n}\, x_1 + .. + u_{n,n}\, x_n.$$

2. Nach den angenommenen Bezeichnungen ist

$$m(m-1)\, u = \sum_{i,k} x_i\, x_k\, u_{i,k} \text{ ***)},$$

worin i und k der Reihe nach gleich $1, 2, .., n$ zu setzen sind.

Beweis. Wenn man die obigen Identitäten der Reihe nach mit $x_1, x_2, .., x_n$ multiplicirt und addirt, so findet man auf der rechten Seite die angegebene Summe, weil

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}, \quad u_{i,k} = u_{k,i}$$

und auf der linken Seite $m(m-1)\, u$, weil (1)

$$u_1 x_1 + ... + u_n x_n = mu.$$

Anmerkung. Wenn man die zweiten partiellen Differentialquotienten der homogenen Function wiederum durch dritte partielle Differentialquotienten derselben ausdrückt, so erhält man für die homogene Function die Summe der Producte ihrer dritten partiellen Differentialquotienten mit den Variablen, in Bezug auf welche differentiirt worden ist u. s. w. Alle diese Zerlegungen der homogenen Function ergeben sich, wenn man, wie SERRET (Algèbre supér. Note XII) bemerkt, die Variablen mit $1+\omega$, also die homogene Function mit $(1+\omega)^m$ multiplicirt und die Identität

$$f(x_1 + \omega x_1, x_2 + \omega x_2, .., x_n + \omega x_n) = (1+\omega)^m f(x_1, x_2, .., x_n)$$

in Bezug auf ω nach MACLAURIN's Theorem entwickelt.

3. Die Resultante des in (1) gegebenen Systems von $n+1$ identischen linearen Gleichungen ist (§. 9, 3)

$$\begin{vmatrix} \frac{m}{m-1} u & u_1 & .. & u_n \\ u_1 & u_{1,1} & .. & u_{n,1} \\ . & . & & . \\ u_n & u_{1,n} & .. & u_{n,n} \end{vmatrix} = 0,$$

*) Mechanica 1736 tom. II, §. 106. 497. Calc. diff. §. 225. **) HESSE Crelle J. 28 p. 78. ***) LACROIX Calc. diff. §. 91.

nach Weglassung des Factor $m-1$ in der ersten Verticalreihe der Elemente (§. 3, 2). Die auf der linken Seite stehende Determinante $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades kann nach §. 3, 3 als Summe der Determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{m}{m-1}u & u_1 & \cdots & u_n \\ 0 & u_{1,1} & \cdots & u_{n,1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & u_{1,n} & \cdots & u_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & u_1 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_{1,1} & \cdots & u_{n,1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ u_n & u_{1,n} & \cdots & u_{n,n} \end{vmatrix}$$

betrachtet werden. Die erste dieser Determinanten reducirt sich nach §. 2, 5 auf

$$\frac{m}{m-1}u \begin{vmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{n,1} \\ \cdot & & \cdot \\ u_{1,n} & \cdots & u_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Die zweite Determinante lässt sich nach §. 5, 2 entwickeln, weil $u_{i,k}=u_{k,i}$. Setzt man nämlich

$$v = \begin{vmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{n,1} \\ \cdot & & \cdot \\ u_{1,n} & \cdots & u_{n,n} \end{vmatrix}$$

und bezeichnet den Coefficienten von $u_{i,k}$ in v durch $\alpha_{i,k}$, so dass $\alpha_{i,k}=\alpha_{k,i}$ (§. 3, 8), so ist

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_{1,1} & \cdots & u_{n,1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ u_n & u_{1,n} & \cdots & u_{n,n} \end{vmatrix} = -\sum_{i,k} u_i u_k \alpha_{i,k}.$$

Folglich lautet die obige Identität:

$$\frac{m}{m-1}uv - \sum_{i,k} u_i u_k \alpha_{i,k} = 0 \text{ *)}.$$

4. Aus dem linearen System (1)

$$\begin{aligned} -(m-1)\,\frac{mu}{m-1} + u_1\ \ x_1 + \cdots + u_n\ \ x_n &= 0 \\ -(m-1)\ \ u_1 + u_{1,1}x_1 + \cdots + u_{n,1}x_n &= 0 \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad & \\ -(m-1)\ \ u_n + u_{1,n}x_1 + \cdots + u_{n,n}x_n &= 0 \end{aligned}$$

folgt nach §. 9, 3 mit Rücksicht auf §. 7, 5 die Proportion

$$\text{(I)} \qquad -(m-1) : x_1 : x_2 : x_3 : \cdots = \sqrt{v} : \sqrt{\beta_{1,1}} : \sqrt{\beta_{2,2}} : \sqrt{\beta_{3,3}} : \cdots,$$

wenn die Coefficienten der Elemente $\frac{mu}{m-1}$, u_i, $u_{i,k}$ in der Determinante $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades

$$R = \begin{vmatrix} \frac{mu}{m-1} & u_1 & \cdots & u_n \\ u_1 & u_{1,1} & \cdots & u_{n,1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ u_n & u_{1,n} & \cdots & u_{n,n} \end{vmatrix}$$

der Reihe nach durch v, β_i, $\beta_{i,k}$ bezeichnet werden. Man hat nämlich $R=0$ (3), $\beta_{i,k}=\beta_{k,i}$ (§. 3, 8), $\sqrt{\beta_{i,i}\,v}=\beta_i$, $\sqrt{\beta_{i,i}\,\beta_{k,k}}=\beta_{i,k}$ (§. 7, 5) u. s. w.

---

*) Hesse Crelle J. 38 p. 242.

Wenn daher irgend eine erste partielle Determinante n^{ten} Grades (§. 4, 3) der identisch verschwindenden Determinante R identisch verschwindet, so verschwinden identisch auch die übrigen ersten partiellen Determinanten derselben, namentlich die Determinante v, und umgekehrt.

Die obige Proportion lehrt, dass

$$-\frac{x_i}{m-1} = \sqrt{\frac{\beta_{i,i}}{v}} = \frac{\sqrt{\beta_{i,i}\, v}}{v},$$

$$\frac{x_i\, x_k}{(m-1)^2} = \frac{\sqrt{\beta_{i,i}\, \beta_{k,k}}}{v}.$$

Nun ist $\sqrt{\beta_{i,i}\, v} = \beta_i$, $\sqrt{\beta_{i,i}\, \beta_{k,k}} = \beta_{i,k}$, folglich

$$\text{(II)} \qquad \beta_i = -\frac{x_i}{m-1}\, v, \quad \beta_{i,k} = \frac{x_i\, x_k}{(m-1)^2}\, v \; ^{*)}.$$

5. Die bewiesenen Relationen leisten einen wichtigen Dienst in der Theorie der Krümmung von Linien und Flächen. Wenn f eine Function der orthogonalen Coordinaten x, y eines Punktes ist, also $f=0$ die Gleichung der Linie ist, auf welcher der Punkt (x, y) liegt; wenn ferner

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = f_{12} = f_{21}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$$

gesetzt wird, so ist bekanntlich

$$x - \xi : y - \eta = f_1 : f_2$$

die Gleichung für die Normale der Linie $(f=0)$ durch den Punkt (x, y) derselben, wobei ξ, η die Coordinaten irgend eines Punktes der Normale bedeuten. Setzt man

$$\lambda (x - \xi) = f_1, \quad \lambda (y - \eta) = f_2,$$

und differentiirt diese Gleichungen vollständig, so erhält man

$$(x-\xi)\, d\lambda + \lambda\, dx = df_1, \quad (y-\eta)\, d\lambda + \lambda\, dy = df_2,$$

oder

$$f_1 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_1 - \lambda\, dx, \quad f_2 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_2 - \lambda\, dy$$

für die Normale der Linie $(f=0)$ durch den Punkt $(x+dx, y+dy)$, welche mit der ersten Normale den Punkt (ξ, η) gemein hat, d. i. das Centrum der Krümmung, welche die Linie $(f=0)$ im Punkte (x, y) hat. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= f_1\, dx + f_2\, dy \\ f_1 \frac{d\lambda}{\lambda} &= (f_{11} - \lambda)\, dx + f_{12}\, dy \\ f_2 \frac{d\lambda}{\lambda} &= f_{21}\, dx + (f_{22} - \lambda)\, dy \end{aligned}$$

folgt (§. 9, 3)

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11}-\lambda & f_{12} \\ f_2 & f_{12} & f_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

---

*) Hiermit stimmen die von Hesse Crelle J. 28 p. 103 u. 38 p. 242 aufgestellten Relationen überein.

zur Bestimmung von λ. Wenn man diese Gleichung nach §. 5, 2 entwickelt, so erhält λ den Coefficienten $f_1^2+f_2^2$ und das von λ unabhängige Glied ist

$$L = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} \end{vmatrix}$$

Daher ist

$$\lambda = \frac{-L}{f_1^2+f_2^2}.$$

Endlich hat man zur Berechnung des Radius der Krümmung, der durch ϱ bezeichnet wird,

$$\varrho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \frac{f_1^2+f_2^2}{\lambda^2}$$

und zur Berechnung der Krümmung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{-L}{(f_1^2+f_2^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Determinante L ist leichter zu behandeln, wenn die Function, auf welche sie sich bezieht, homogen ist. Versteht man unter u die homogene Function der Variablen x_1, x_2, x_3, welche mit f identisch wird, wenn $x_3=1$, so hat man (4)

$$L = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} = \frac{v}{(m-1)^2},$$

worin

$$v = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix}$$

und nach der Differentiation $x_3 = 1$ zu setzen ist.

Die Punkte der Linie ($f=0$ oder $u=0$), für welche L oder v verschwindet, mithin die Krümmung verschwindet, sind im Allgemeinen Wendepunkte der Linie. Sie erscheinen als Durchschnitte der Linie ($f=0$ oder $u=0$) und der Linie ($L=0$ oder $v=0$). Nun sind f und u nach Voraussetzung m^{ten} Grades, v aber $3(m-2)^{\text{ten}}$ Grades, folglich haben die gedachten Linien im Allgemeinen $3m(m-2)$ Durchschnitte, d. h. eine Linie m^{ten} Grades hat im Allgemeinen $3m(m-2)$ Wendepunkte *).

6. Wenn f eine Function der orthogonalen Coordinaten x, y, z eines Punktes, also $f=0$ die Gleichung der Fläche ist, auf welcher der Punkt (x, y, z) liegt, so ist nach den vorigen Bezeichnungen

$$x-\xi : y-\eta : z-\zeta = f_1 : f_2 : f_3$$

die Gleichung für die Normale der Fläche ($f=0$) durch den Punkt (x, y, z), wofür

$$\lambda(x-\xi) = f_1, \quad \lambda(y-\eta) = f_2, \quad \lambda(z-\zeta) = f_3$$

gesetzt werden kann. Die Normalen der Fläche ($f=0$) durch die Punkte (x, y, z) und $(x+dx, y+dy, z+dz)$ schneiden sich im Allgemeinen nicht, sondern nur

*) Dieser Satz ist zuerst von Plücker (Syst. der analyt. Geom. p. 264) aufgestellt worden. Der hier mitgetheilte Beweis rührt von Hesse (l. c.) her. Einen andern Beweis findet man bei Jacobi (Crelle J. 40 p. 254).

dann, wenn der zuletzt genannte Punkt auf einer durch (x, y, z) gehenden Krümmungslinie liegt. Ihr Durchschnitt (ξ, η, ζ) ist das Krümmungscentrum eines Hauptschnitts der Fläche für den Punkt (x, y, z). Durch Differentiation der obigen Gleichungen findet man für diesen Fall

$$(x-\xi)\, d\lambda + \lambda\, dx = df_1, \text{ u. s. w.}$$

oder

$$f_1 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_1 - \lambda\, dx$$
$$f_2 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_2 - \lambda\, dy$$
$$f_3 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_3 - \lambda\, dz,$$

folglich (§. 9, 3)

$$\begin{vmatrix} f_1 & df_1 & dx \\ f_2 & df_2 & dy \\ f_3 & df_3 & dz \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Differentialgleichung in Verbindung mit der Differentialgleichung der gegebenen Fläche

$$f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz = 0$$

bestimmt die durch den Punkt (x, y, z) gehende Krümmungslinie, auf welcher der Punkt $(x+dx, y+dy, z+dz)$ liegt. Aus dem System der Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz \\ f_1 \frac{d\lambda}{\lambda} &= (f_{11}-\lambda)\, dx + f_{12}\, dy + f_{13}\, dz \\ f_2 \frac{d\lambda}{\lambda} &= f_{12}\, dx + (f_{22}-\lambda)\, dy + f_{23}\, dz \\ f_3 \frac{d\lambda}{\lambda} &= f_{13}\, dx + f_{23}\, dy + (f_{33}-\lambda)\, dz \end{aligned}$$

folgt zur Bestimmung von λ

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11}-\lambda & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22}-\lambda & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist zweiten Grades und zwar hat λ^2 den Coefficienten $-f_1^2 - f_2^2 - f_3^2$, während das von λ unabhängige Glied

$$L = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix}$$

ist. Bezeichnet man die Wurzeln derselben Gleichung durch λ', λ'', so hat man

$$\lambda' \lambda'' = \frac{-L}{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}.$$

Wenn man endlich den Abstand des Punktes (ξ, η, ζ) von (x, y, z) durch ϱ bezeichnet, so ist

$$\varrho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$
$$\lambda\varrho = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}.$$

Demnach hat auch ϱ zwei Werthe ϱ', ϱ'', so dass

$$\lambda' \lambda''\, \varrho' \varrho'' = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2.$$

Die reciproken Werthe $\frac{1}{\varrho'}$, $\frac{1}{\varrho''}$ sind aber die Krümmungen der durch (x, y, z) gehenden Krümmungslinien oder der von ihnen berührten Hauptschnitte der Fläche, also ist das Product der Hauptkrümmungen der Fläche $(f=0)$ in dem Punkte (x, y, z)

$$\frac{1}{\varrho'\varrho''} = -\frac{L}{(f_1^2+f_2^2+f_3^2)^2}.$$

Versteht man unter u die homogene Function der Variablen x_1, x_2, x_3, x_4, welche mit f identisch wird, wenn $x_4 = 1$ ist, so hat man (4)

$$L = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_3 & u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix} = \frac{v}{(m-1)^2}.$$

Die Punkte der Fläche $(f=0$ oder $u=0)$, für welche L oder v verschwindet, sind im Allgemeinen Wendepunkte der Fläche. Sie liegen auf dem Durchschnitt der Flächen $(f=0$ oder $u=0)$ und $(L=0$ oder $v=0)$. Nun sind f und u nach Voraussetzung m^{ten} Grades, v aber $4(m-2)^{\text{ten}}$ Grades, also liegt die Wendelinie einer Fläche m^{ten} Grades zugleich auf einer bestimmten Fläche $4(m-2)^{\text{ten}}$ Grades*).

7. Aus den in (1) gegebenen Identitäten hat Jacobi**), veranlasst durch einen von Hesse mitgetheilten Satz, folgendes die mehr erwähnte Determinante

$$v = \begin{vmatrix} u_{1,1} & \cdot\cdot & u_{n,1} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ u_{1,n} & \cdot\cdot & u_{n,n} \end{vmatrix}$$

betreffende System von Identitäten entwickelt. Zunächst ist nach §. 9, 1

$$\text{(I)} \qquad v\,x_i = (m-1)(\alpha_{1,i}\,u_1 + \cdot\cdot + \alpha_{n,i}\,u_n),$$

wenn $\alpha_{i,k} = \alpha_{k,i}$ wie oben (3) den Coefficienten von $u_{i,k} = u_{k,i}$ in v bedeutet. Indem man diese Identität in Bezug auf x_i oder x_k differentiirt und zur Abkürzung

$$\frac{\partial v}{\partial x_k} = v_k$$

setzt, erhält man

$$\text{(II)} \qquad v_i\,x_i = (m-1)\left(\frac{\partial \alpha_{1,i}}{\partial x_i}\,u_1 + \cdot\cdot + \frac{\partial \alpha_{n,i}}{\partial x_i}\,u_n\right) + (m-2)\,v,$$

$$v_k x_i = (m-1)\left(\frac{\partial \alpha_{1,i}}{\partial x_k}\,u_1 + \cdot\cdot + \frac{\partial \alpha_{n,i}}{\partial x_k}\,u_n\right),$$

weil (§. 3, 1)

$$\alpha_{1,i}\,u_{1,i} + \cdot\cdot + \alpha_{n,i}\,u_{n,i} = v$$
$$\alpha_{1,i}\,u_{1,k} + \cdot\cdot + \alpha_{n,i}\,u_{n,k} = 0.$$

Durch abermalige Differentiation der gefundenen Identitäten, wobei

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_k\,\partial x_l} = v_{k,l}$$

gesetzt ist, erhält man

---

*) Hesse l. c. **) Crelle J. 40 p. 318.

$$\text{(III)}\quad v_{i,k}\,x_i = (m-1)\left(\frac{\partial^2 \alpha_{1,i}}{\partial x_i\,\partial x_k}\,u_1 + \ldots + \frac{\partial^2 \alpha_{n,i}}{\partial x_i\,\partial x_k}\,u_n\right)$$

$$-(m-1)\left(\alpha_{1,i}\frac{\partial u_{1,i}}{\partial x_k} + \ldots + \alpha_{n,i}\frac{\partial u_{n,i}}{\partial x_k}\right) + (m-1)\,v_k,$$

$$v_{k,l}\,x_i = (m-1)\left(\frac{\partial^2 \alpha_{1,i}}{\partial x_k\,\partial x_l}\,u_1 + \ldots + \frac{\partial^2 \alpha_{n,i}}{\partial x_k\,\partial x_l}\,u_n\right)$$

$$-(m-1)\left(\alpha_{1,i}\frac{\partial u_{1,l}}{\partial x_k} + \ldots + \alpha_{n,i}\frac{\partial u_{n,l}}{\partial x_k}\right),$$

indem man die Differentiation der Identitäten

$$\alpha_{1,i}\,u_{1,i} + \ldots + \alpha_{n,i}\,u_{n,i} = v$$
$$\alpha_{1,i}\,u_{1,l} + \ldots + \alpha_{n,i}\,u_{n,l} = 0$$

in Bezug auf x_k zu Hülfe nimmt.

8. Das System von Werthen der Variablen $x_1, x_2, .., x_n$, wodurch den im Allgemeinen unvereinbaren Gleichungen

$$u_1 = 0,\; u_2 = 0, .., u_n = 0$$

genügt wird, hat zur Folge, dass die Functionen u und v (1 und 7, I), sowie $v_1, v_2, .., v_n$ (7, II) verschwinden. Zugleich verschwindet die Determinante

$$w = \begin{vmatrix} v_{1,1} & .. & v_{n,1} \\ . & & .. \\ v_{1,n} & .. & v_{n,n} \end{vmatrix},$$

welche aus v ebenso abgeleitet ist, als v aus u.

Aus den Gleichungen

$$0 = u_{1,1}\,x_1 + \ldots + u_{n,1}\,x_n$$
$$. \quad . \quad .$$
$$0 = u_{1,n}\,x_1 + \ldots + u_{n,n}\,x_n$$

folgt aber (§. 9, 3 und §. 7, 5)

$$x_1 : x_2 : x_3 : \ldots = \sqrt{\alpha_{1,1}} : \sqrt{\alpha_{2,2}} : \sqrt{\alpha_{3,3}} : \ldots,$$

wenn $\alpha_{i,k}$ den Coefficienten von $u_{i,k}$ in v bedeutet. Daher hat man zugleich

$$\sqrt{\alpha_{i,i}} = x_i\sqrt{N},\qquad \sqrt{\alpha_{k,k}} = x_k\sqrt{N},$$
$$\alpha_{i,k} = x_i\,x_k\,N,$$

wo N für alle Suffixe unveränderlich ist. Durch diese Substitutionen erhält man in (7, III)

$$v_{i,k}\,x_i = -(m-1)\,N\,x_i\left(x_1\frac{\partial u_{i,k}}{\partial x_1} + \ldots + x_n\frac{\partial u_{i,k}}{\partial x_n}\right),$$

d. i. nach (1)

$$v_{i,k} = -(m-1)(m-2)\,N\,u_{i,k},$$

folglich

$$v_{11} : v_{12} : \ldots : v_{23} : \ldots = u_{11} : u_{12} : \ldots : u_{23} : \ldots\;^{*)}.$$

9. Die homogene Function u vom m^{ten} Grade wird, wenn sie rational und ganz ist und ganze Coefficienten hat, eine Form m^{ten} Grades (quadratisch,

---

*) Hesse Crelle J. 40 p. 316. Vergl. Jacobi l. c.

cubisch u.s.f.) von n unbestimmten Variablen (binär, ternär u.s.f.) genannt *). Eine quadratische Form (häufig »Form« schlechthin) kann durch

$$\sum_{i,k} a_{i,k}\, x_i\, x_k\,,$$

eine cubische Form durch

$$\sum_{i,k,l} a_{i,k,l}\, x_i\, x_k\, x_l \;{}^{**})$$

dargestellt werden, wobei i,k,l alle Werthe von 1 bis n erhalten und die Grössen $a_{i,k}$, $a_{i,k,l}$ durch Umstellung ihrer Suffixe keine Veränderung erleiden. Unter der Determinante einer quadratischen Form versteht man den negativen Werth der aus dem System der Coefficienten gebildeten Determinante ***). Ist nämlich

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdot & & \cdot\,\cdot \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

so heisst $-R$ die Determinante der Form $u = \sum_{i,k} a_{i,k}\, x_i\, x_k$. Die Entwickelung dieser Determinante erfolgt nach §. 5, 2. Wenn $\alpha_{i,k}$ den Coefficienten von $a_{i,k}$ in R bedeutet, so heisst die quadratische Form

$$U = -\sum_{i,k} \alpha_{i,k}\, y_i\, y_k$$

der gegebenen Form u adjungirt (forma adjuncta) †). Nach §. 5, 2 hat man

$$U = \begin{vmatrix} 0 & y_1 & \cdots & y_n \\ y_1 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot\,\cdot \\ y_n & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Ferner ist (§. 7, 1)

$$-\begin{vmatrix} -\alpha_{1,1} & \cdots & -\alpha_{1,n} \\ \cdot & & \cdot\,\cdot \\ -\alpha_{n,1} & \cdots & -\alpha_{n,n} \end{vmatrix} = (-R)^{n-1},$$

d. h. die Determinante der adjungirten Form ist die $(n-1)^{\text{te}}$ Potenz der Determinante der Form.

Nach §. 5, 2 hat man

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot\,\cdot \\ x_n & \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = -\sum x_i\, x_k\, A_{i,k}\,,$$

wenn $A_{i,k}$ den Coefficienten von $\alpha_{i,k}$ in $\sum \pm \alpha_{1,1} \cdots \alpha_{n,n}$ bedeutet. Nun ist $A_{i,k} = R^{n-2}\, a_{i,k}$ (§. 7, 3), folglich

$$u = -\frac{1}{R^{n-2}} \begin{vmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_1 & \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot\,\cdot \\ x_n & \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} \;{}^{\dagger\dagger}).$$

Anmerkung. Wenn die Form u quadratisch ist, so sind ihre partiellen Differentialquotienten linear; daher ist sowohl die Determinante der zweiten

*) Gauss Disquis. arithm. art. 153 u. 266. **) Vergl. Hesse Crelle J. 28 p. 74.
***) Gauss l. c. 154 u. 267. †) Gauss l. c. 267. ††) Brioschi Det. (53).

partiellen Differentialquotienten von u (§. 13, 3), als auch die Discriminante von u (§. 12, 11) nur durch einen Zahlenfactor von der Determinante dieser quadratischen Form verschieden.

§. 15. Die linearen, insbesondere die orthogonalen Substitutionen.

1. Wenn eine gegebene Function der Variablen $x_1, x_2, .., x_n$ durch die linearen Substitutionen

$$x_1 = b_{1,1}\, y_1 + b_{1,2}\, y_2 + \,..\, + b_{1,n}\, y_n$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_n = b_{n,1}\, y_1 + b_{n,2}\, y_2 + \,..\, + b_{n,n}\, y_n$$

in eine Function der Variablen $y_1, y_2, .., y_n$ zu transformiren ist, so wird die Determinante der Substitutionscoefficienten

$$\begin{vmatrix} b_{1,1} & .. & b_{1,n} \\ . & & .. \\ b_{n,1} & .. & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

die Determinante (modulus) der linearen Substitution genannt. Dieselbe muss von Null verschieden sein, wenn $x_1, x_2, .., x_n$ als unabhängig von einander vorausgesetzt werden (§. 9, 2. §. 13, 3). Die lineare Substitution heisst unimodular*), wenn ihre Determinante $= 1$ ist.

2. Wenn die linearen Functionen $f_1, f_2, .., f_n$ der Variablen $x_1, x_2, .., x_n$ durch eine lineare Substitution in lineare Functionen der Variablen $y_1, y_2, .., y_n$ transformirt werden, so ist die Determinante des Systems der transformirten Functionen (§. 13, 1) das Product der Determinante des Systems der gegebenen Functionen mit der Determinante der linearen Substitution**).

Beweis. Es seien

$$f_1 = a_{1,1}\, x_1 + \,..\, + a_{1,n}\, x_n$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f_n = a_{n,1}\, x_1 + \,..\, + a_{n,n}\, x_n$$

die gegebenen linearen Functionen. Durch die lineare Substitution

$$x_1 = b_{1,1}\, y_1 + \,..\, + b_{1,n}\, y_n$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_n = b_{n,1}\, y_1 + \,..\, + b_{n,n}\, y_n$$

erhält man die transformirten Functionen

$$f_1 = c_{1,1}\, y_1 + \,..\, + c_{1,n}\, y_n$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f_n = c_{n,1}\, y_1 + \,..\, + c_{n,n}\, y_n,$$

worin $c_{i,k}$ gefunden wird, indem man $x_1, x_2, .., x_n$ der Reihe nach mit $a_{i,1}, a_{i,2}, ..,$ $a_{i,n}$ multiplicirt, addirt und in der Summe den Coefficienten von y_k aufsucht:

$$c_{i,k} = a_{i,1}\, b_{1,k} + \,..\, + a_{i,n}\, b_{n,k}.$$

*) Sylvester Cambr. and Dubl. math. J. 7 p. 52. **) Vergl. den algebraischen Beweis der Multiplicationsregel (§. 6), z. B. Joachimsthal Crelle J. 40 p. 22.

Nach §. 6, 1 ist

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & \cdot\cdot & c_{1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \\ c_{n,1} & \cdot\cdot & c_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot\cdot & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \\ a_{n,1} & \cdot\cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdot\cdot & b_{1,n} \\ \cdot & \cdot\cdot & \\ b_{n,1} & \cdot\cdot & b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

3. Wenn man die algebraischen Gleichungen $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$, jene vom m^{ten}, diese vom n^{ten} Grade, durch die Substitution

$$x = \frac{py+qz}{p'y+q'z}$$

in die Gleichungen

$$(p'y+q'z)^m f\left(\frac{py+qz}{p'y+q'z}\right)=0 \text{ und } (p'y+q'z)^n \varphi\left(\frac{py+qz}{p'y+q'z}\right)=0$$

transformirt, wenn ferner $R=0$ die Resultante der gegebenen Gleichungen und $R'=0$ die Resultante der transformirten Gleichungen bedeutet, so ist

$$R' = (pq'-p'q)^{mn} R\ ^{*}).$$

Beweis. Unter der Voraussetzung, dass $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m$ die Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ und $\beta_1, \beta_2, .., \beta_n$ die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x)=0$ bedeuten, hat man identisch

$$f(x) = a_m\ (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ ..\ (x-\alpha_m),$$
$$\varphi(x) = b_n\ (x-\beta_1)(x-\beta_2)\ ..\ (x-\beta_n),$$

folglich

$$u^m f\left(\frac{t}{u}\right) = a_m\ (t-\alpha_1 u)(t-\alpha_2 u)\ ..\ (t-\alpha_m u),$$
$$u^n \varphi\left(\frac{t}{u}\right) = b_n\ (t-\beta_1 u)(t-\beta_2 u)\ ..\ (t-\beta_n u).$$

Die Resultante der Gleichungen

$$u^m f\left(\frac{t}{u}\right)=0 \text{ und } u^n\varphi\left(\frac{t}{u}\right)=0$$

ist, übereinstimmend mit der Resultante der Gleichungen $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$, nach §. 11, 1

$$\prod_{i,k} (\alpha_i-\beta_k) = 0,$$

worin $\alpha_i-\beta_k$ als Determinante der linearen Functionen

$$t-\alpha_i u, \quad t-\beta_k u$$

erscheint. Durch die lineare Substitution

$$t = py+qz$$
$$u = p'y+q'z$$

geht die Determinante von $t-\alpha_i u$ und $t-\beta_k u$ nach (2) in

$$(\alpha_i-\beta_k)(pq'-p'q)$$

über, folglich ist

$$(pq'-p'q)^{mn} \prod_{i,k} (\alpha_i-\beta_k) = 0$$

die Resultante der transformirten Gleichungen

$$(p'y+q'z)^m f\left(\frac{py+qz}{p'y+q'z}\right)=0, \quad (p'y+q'z)^n \varphi\left(\frac{py+qz}{p'y+q'z}\right)=0.$$

---

*) Jacobi Crelle J. 40 p. 245. Salmon higher plane curves p. 295.

Anmerkung. Wenn die Gleichung $f(x)=0$ durch die Substitution

$$x=\frac{py+qz}{p'y+q'z}$$

in die Gleichung

$$(p'y+q'z)^m f\left(\frac{py+qz}{p'y+q'z}\right)=0$$

transformirt wird, so findet man durch dasselbe Verfahren, dass die Determinante der transformirten Gleichung aus der Determinante der gegebenen Gleichung (§. 12, 8) durch Multiplication mit $(pq'-p'q)^{m(m-1)}$ abgeleitet wird, weil $\prod_{i,k}(\alpha_i-\alpha_k)$ ein Product von $m(m-1)$ Differenzen ist, die sich als Determinanten linearer Functionen betrachten lassen.

4. Wenn eine Function f der Variablen $x_1, x_2,.., x_n$ durch eine lineare Substitution in eine Function der Variablen $y_1, y_2,.., y_n$ transformirt wird, so ist die Determinante der transformirten Function das Product der Determinante der gegebenen Function (§. 13, 3) mit dem Quadrat der Determinante der linearen Substitution *).

Beweis. Die Function f werde durch die lineare Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{1,1}\,y_1 + \ldots + b_{1,n}\,y_n \\ &\;\;\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_n &= b_{n,1}\,y_1 + \ldots + b_{n,n}\,y_n \end{aligned}$$

transformirt. Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\,\partial y_k} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y_i\,\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_k}+\ldots+\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\,\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_k} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y_i\,\partial x_1}b_{1,k}+\ldots+\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\,\partial x_n}b_{n,k},\end{aligned}$$

folglich nach §. 6, 1

$$\text{(A)}\quad \begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y_1\,\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial y_1\,\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_n\,\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial y_n\,\partial y_n}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y_1\,\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial y_1\,\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_n\,\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial y_n\,\partial x_n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{1,1} & \ldots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \\ b_{n,1} & \ldots & b_{n,n}\end{vmatrix}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_i}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_i} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}b_{1,i}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}b_{n,i},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\,\partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_k}b_{1,i}+\ldots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_k}b_{n,i},$$

folglich, wie vorhin,

$$\text{(B)}\quad \begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial y_1\,\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial y_1\,\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_n\,\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial y_n\,\partial x_n}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_n}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{1,1} & \ldots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \\ b_{n,1} & \ldots & b_{n,n}\end{vmatrix}.$$

---

*) Hesse Crelle J. 28 p. 89. Der Fall, in welchem die Function f quadratisch ist, kommt für $n=2$ bei Lagrange vor (Mém. de l'Acad. de Berlin 1773 p. 285), für $n=3$ bei Gauss (disq. arithm. 268).

Durch Multiplication der Gleichungen (A) und (B) findet man

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_1} & .. & \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_n} \\ . & .. & . \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_n \partial y_1} & .. & \frac{\partial^2 f}{\partial y_n \partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & .. & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ . & .. & . \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & .. & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & .. & b_{1,n} \\ . & .. & . \\ b_{n,1} & .. & b_{n,n} \end{vmatrix}^2.$$

5. Unter den linearen Substitutionen, wodurch man eine gegebene Function transformiren kann, ist besonders eine solche bemerkenswerth, bei welcher die Summe der Quadrate der neuen Variablen von der Summe der Quadrate der ursprünglichen Variablen nicht verschieden ist. Diese Substitution ist von Euler (Nov. Comm. Petrop. 15 p. 75, 20 p. 217), Cauchy (Exerc. de Math. 4 p. 140), Jacobi (Crelle J. 12 p. 7), Cayley (Crelle J. 32 p. 119) in Betracht gezogen und nach einer Bemerkung des Letztern orthogonale Substitution genannt worden.

Ist die gegebene Function von den Variablen $x_1, x_2, .., x_n$ abhängig und durch die lineare (orthogonale) Substitution

$$x_1 = c_{1,1} y_1 + c_{1,2} y_2 + .. + c_{1,n} y_n$$
$$. \quad . \quad .$$
$$x_n = c_{n,1} y_1 + c_{n,2} y_2 + .. + c_{n,n} y_n$$

in eine Function von $y_1, y_2, .., y_n$ zu transformiren, dergestalt dass

$$y_1^2 + y_2^2 + .. + y_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + .. + x_n^2,$$

so haben die Coefficienten folgende Haupteigenschaften.

I. Für jedes i und k von 1 bis n ist (Euler)

$$c_{1,i}^2 + c_{2,i}^2 + .. + c_{n,i}^2 = 1$$
$$c_{1,i}\, c_{1,k} + c_{2,i}\, c_{2,k} + .. + c_{n,i}\, c_{n,k} = 0$$

zufolge der Identität

$$y_1^2 + y_2^2 + .. + y_n^2 = (c_{1,1} y_1 + .. + c_{1,n} y_n)^2 + .. + (c_{n,1} y_1 + .. + c_{n,n} y_n)^2$$
$$= y_1^2 (c_{1,1}^2 + .. + c_{n,1}^2) + ..$$
$$+ 2 y_1 y_2 (c_{1,1}\, c_{1,2} + .. + c_{n,1}\, c_{n,2}) + \dots$$

II. Um die transformirte Function in die gegebene zu transformiren, hat man (Cauchy)

$$y_i = c_{1,i}\, x_1 + c_{2,i}\, x_2 + .. + c_{n,i}\, x_n$$

zu substituiren. Denn

$$c_{1,i}\, x_1 + .. + c_{n,i}\, x_n = y_1 (c_{1,i}\, c_{1,1} + .. + c_{n,i}\, c_{n,1}) + ..$$
$$+ y_n (c_{1,i}\, c_{1,n} + .. + c_{n,i}\, c_{n,n}),$$

worin der Coefficient von y_i den Werth 1 hat, während die Coefficienten der übrigen Grössen verschwinden (I).

III. Das Quadrat der Determinante einer orthogonalen Substitution ist 1 (Jacobi). Denn nach der Multiplicationsregel (§. 6, 3) ist

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & .. & c_{1,n} \\ . & .. & . \\ c_{n,1} & .. & c_{n,n} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} d_{1,1} & .. & d_{1,n} \\ . & .. & . \\ d_{n,1} & .. & d_{n,n} \end{vmatrix},$$

wo

$$d_{i,k} = c_{1,i}\, c_{1,k} + c_{2,i}\, c_{2,k} + .. + c_{n,i}\, c_{n,k}.$$

Nun ist $d_{i,k} = 0$, $d_{i,i} = 1$ (I), folglich reducirt sich die gesuchte Determinante auf ihr Anfangsglied $d_{1,1}\, d_{2,2} \,..\, d_{n,n} = 1$ (§. 2, 7).

IV. Wenn die Determinante der orthogonalen Substitution durch ε, der Coefficient von $c_{i,k}$ in ε durch $\gamma_{i,k}$ bezeichnet wird, so ist (Jacobi)

$$\gamma_{i,k} = \varepsilon\, c_{i,k}.$$

Um diese Identität zu finden, multiplicirt man der Reihe nach die Identitäten

$$\begin{array}{l} c_{1,1}\, c_{1,k} + \,..\, + c_{n,1}\, c_{n,k} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{1,k}\, c_{1,k} + \,..\, + c_{n,k}\, c_{n,k} = 1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{1,n}\, c_{1,k} + \,..\, + c_{n,n}\, c_{n,k} = 0 \end{array}$$

mit $\gamma_{i,1}, \gamma_{i,2}, \ldots \gamma_{i,n}$. Durch Summirung erhält man

$$c_{1,k}\,(c_{1,1}\,\gamma_{i,1} + \,..\, + c_{1,n}\,\gamma_{i,n}) + \,..\, + c_{i,k}\,(c_{i,1}\,\gamma_{i,1} + \,..\, + c_{i,n}\,\gamma_{i,n})$$
$$+ \,..\, + c_{n,k}\,(c_{n,1}\,\gamma_{i,1} + \,..\, + c_{n,n}\,\gamma_{i,n}) = \gamma_{i,k}.$$

Der Coefficient von $c_{i,k}$ ist ε, die Coefficienten der übrigen Grössen $c_{1,k}, .., c_{n,k}$ verschwinden (§. 3, 1).

V. Die Coefficienten der orthogonalen Substitution genügen dem zweiten System von Identitäten (Euler)

$$\begin{array}{l} c_{i,1}^2 + c_{i,2}^2 + \,..\, + c_{i,n}^2 = 1 \\ c_{i,1}\, c_{k,1} + c_{i,2}\, c_{k,2} + \,..\, + c_{i,n}\, c_{k,n} = 0. \end{array}$$

Denn nach (IV) ist

$$\varepsilon\,(c_{i,1}\, c_{k,1} + \,..\, + c_{i,n}\, c_{k,n}) = \gamma_{i,1}\, c_{k,1} + \,..\, + \gamma_{i,n}\, c_{k,n}.$$

Dieses Aggregat hat aber den Werth ε oder 0, je nachdem i und k gleich oder ungleich sind (§. 3, 1).

VI. Unter den partiellen Determinanten, welche man aus dem System der Coefficienten einer orthogonalen Substitution bilden kann, findet folgender Zusammenhang statt (Jacobi):

$$\begin{vmatrix} c_{m+1,m+1} & .. & c_{m+1,n} \\ \cdot & & .. \\ c_{n,m+1} & .. & c_{n,n} \end{vmatrix} = \varepsilon \begin{vmatrix} c_{1,1} & .. & c_{1,m} \\ \cdot & & .. \\ c_{m,1} & .. & c_{m,m} \end{vmatrix}.$$

Denn nach §. 7, 2 hat man

$$\begin{vmatrix} \gamma_{1,1} & .. & \gamma_{1,m} \\ \cdot & & .. \\ \gamma_{m,1} & .. & \gamma_{m,m} \end{vmatrix} = \varepsilon^{m-1} \begin{vmatrix} c_{m+1,m+1} & .. & c_{m+1,n} \\ \cdot & & .. \\ c_{n,m+1} & .. & c_{n,n} \end{vmatrix}$$

und nach (IV) mit Rücksicht auf §. 3, 2

$$\begin{vmatrix} \gamma_{1,1} & .. & \gamma_{1,m} \\ \cdot & & .. \\ \gamma_{m,1} & .. & \gamma_{m,m} \end{vmatrix} = \varepsilon^{m} \begin{vmatrix} c_{1,1} & .. & c_{1,m} \\ \cdot & & .. \\ c_{m,1} & .. & c_{m,m} \end{vmatrix}.$$

Durch Vergleichung dieser Identitäten ergiebt sich die behauptete Identität.

Noch einige weniger nahe liegende Relationen zwischen den Coefficienten einer orthogonalen Substitution haben Euler in der zuerst erwähnten Abhandlung und Jacobi Crelle J. 30 p. 46 angegeben.

6. Da zwischen den n^2 Coefficienten einer orthogonalen Substitution $n+\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen (5, I) bestehen, so lassen sich dieselben als Functionen von $n^2-n-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ unbestimmten Grössen

$$\begin{matrix} b_{1,2} & b_{1,3} \cdot\cdot & b_{1,n} \\ & b_{2,3} \cdot\cdot & b_{2,n} \\ & & \cdot\cdot\cdot \\ & & b_{n-1,n} \end{matrix}$$

betrachten. In der That hat Euler nicht nur den Weg angezeigt, wie man durch $\frac{n(n-1)}{2}$ binäre Transformationen die Coefficienten einer orthogonalen Substitution als Functionen von $\frac{n(n-1)}{2}$ unbestimmten Grössen darstellen könne, sondern er hat auch in den Fällen $n=3$ und $n=4$ diese Coefficienten durch die unbestimmten Grössen rational ausgedrückt. Mit Hülfe der Determinanten ist es Cayley (l. c.) gelungen, die zur Transformation einer Function von n Variablen dienenden Coefficienten einer orthogonalen Substitution als rationale Functionen von $\frac{n(n-1)}{2}$ unbestimmten Grössen darzustellen.

Wenn nämlich diese unbestimmten Grössen wie vorher durch $b_{1,2},.., b_{n-1,n}$ bezeichnet werden, wenn man ferner unter den Voraussetzungen

$$b_{i,k}+b_{k,i}=0, \quad b_{i,i}=\omega$$

die Determinante

$$B=\begin{vmatrix} b_{1,1} & \cdot\cdot & b_{1,n} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ b_{n,1} & \cdot\cdot & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

bildet und den Coefficienten von $b_{i,k}$ in B durch $\beta_{i,k}$ bezeichnet, so hat man

$$c_{i,k}=\frac{2\,\omega\,\beta_{i,k}}{B}, \quad c_{i,i}=\frac{2\,\omega\,\beta_{i,i}-B}{B}$$

als allgemeine Formeln für die Coefficienten einer orthogonalen Substitution, deren Determinante den Werth 1 hat. Die Coefficienten einer orthogonalen Substitution von der Determinante -1 erhält man, indem man im System der gefundenen Coefficienten bei einer ungeraden Anzahl paralleler Reihen die Zeichen ändert.

Beweis. Die Grössen $x_1, x_2,.., x_n$ können dadurch von den Grössen $y_1, y_2,.., y_n$ abhängig gemacht werden, dass man zugleich

$$\begin{aligned} x_i &= b_{i,1}\,z_1+\cdot\cdot+b_{i,n}\,z_n \\ y_i &= b_{1,i}\,z_1+\cdot\cdot+b_{n,i}\,z_n \end{aligned}$$

setzt. Durch Auflösung der linearen Systeme

$$\begin{matrix} x_1=b_{1,1}\,z_1+\cdot\cdot+b_{1,n}\,z_n & \quad y_1=b_{1,1}\,z_1+\cdot\cdot+b_{n,1}\,z_n \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_n=b_{n,1}\,z_1+\cdot\cdot+b_{n,n}\,z_n & \quad y_n=b_{1,n}\,z_1+\cdot\cdot+b_{n,n}\,z_n \end{matrix}$$

findet man (§. 9, 1)

$$\begin{aligned} B\,z_i &= \beta_{1,i}\,x_1+\beta_{2,i}\,x_2+\cdot\cdot+\beta_{n,i}\,x_n \\ B\,z_i &= \beta_{i,1}\,y_1+\beta_{i,2}\,y_2+\cdot\cdot+\beta_{i,n}\,y_n. \end{aligned}$$

Vermöge der Voraussetzungen $b_{i,k}+b_{k,i}=0$, $b_{i,i}=\omega$ und des zwischen x_i, y_i und den Grössen $z_1, z_2,.., z_n$ angenommenen Zusammenhangs ist aber

$$x_i+y_i=2\,\omega\,z_i,$$

folglich hat man zugleich

$$\begin{aligned} B y_i &= 2\omega\beta_{1,i} x_1 + \ldots + (2\omega\beta_{i,i} - B)\, x_i + \ldots + 2\omega\beta_{n,i} x_n \\ B x_i &= 2\omega\beta_{i,1}\, y_1 + \ldots + (2\omega\beta_{i,i} - B)\, y_i + \ldots + 2\omega\beta_{i,n}\, y_n, \end{aligned}$$

oder abgekürzt

$$\begin{aligned} y_i &= c_{1,i}\, x_1 + \ldots + c_{n,i}\, x_n \\ x_i &= c_{i,1}\, y_1 + \ldots + c_{i,n}\, y_n . \end{aligned}$$

Aus der Identität

$$y_i = c_{1,i}\,(c_{1,1}\, y_1 + \ldots + c_{1,n}\, y_n) + \ldots + c_{n,i}\,(c_{n,1}\, y_1 + \ldots + c_{n,n}\, y_n)$$

folgen die Identitäten

$$\begin{aligned} 1 &= c_{1,i}^2 + c_{2,i}^2 + \ldots + c_{n,i}^2 \\ 0 &= c_{1,i}\, c_{1,k} + c_{2,i}\, c_{2,k} + \ldots + c_{n,i}\, c_{n,k}, \end{aligned}$$

wodurch diese rationalen Functionen der unbestimmten Grössen $b_{1,2}, \ldots, b_{n-1,n}$ als Coefficienten einer orthogonalen Substitution characterisirt werden (5, I).

Die Determinante dieser orthogonalen Substitution werde mit ε bezeichnet. Dann ist (§. 3, 2)

$$\begin{vmatrix} \beta_{1,1} - \frac{B}{2\omega} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & . \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} - \frac{B}{2\omega} & \beta_{2,3} & . \\ \beta_{3,1} & \beta_{3,2} & \beta_{3,3} - \frac{B}{2\omega} & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} = \varepsilon \left(\frac{B}{2\omega}\right)^n .$$

Wenn man diese Determinante mit $B\omega^n$ multiplicirt, so findet man (§. 6, 4)

$$\varepsilon B \left(\frac{B}{2}\right)^n = \begin{vmatrix} h_{1,1} & \ldots & h_{1,n} \\ . & & . \\ h_{n,1} & \ldots & h_{n,n} \end{vmatrix},$$

worin

$$\begin{aligned} h_{i,k} &= \beta_{i,1}\, b_{k,1}\, \omega + \ldots + \left(\beta_{i,i} - \frac{B}{2\omega}\right) b_{k,i}\, \omega + \ldots + \beta_{i,n}\, b_{k,n}\, \omega \\ &= -\frac{B}{2\omega}\, b_{k,i}\, \omega = \frac{B}{2}\, b_{i,k} \quad (\text{§. } 3, 1) \\ h_{i,i} &= \beta_{i,1}\, b_{i,1}\, \omega + \ldots + \left(\beta_{i,i} - \frac{B}{2\omega}\right) b_{i,i}\, \omega + \ldots + \beta_{i,n}\, b_{i,n}\, \omega \\ &= B\omega - \frac{B}{2}\, b_{i,i} = \frac{B}{2}\, b_{i,i} . \end{aligned}$$

Durch Substitution dieser Werthe ergiebt sich (§. 3, 2)

$$\begin{vmatrix} h_{1,1} & \ldots & h_{1,n} \\ . & & . \\ h_{n,1} & \ldots & h_{n,n} \end{vmatrix} = B \left(\frac{B}{2}\right)^n,$$

folglich $\varepsilon = 1$. Wenn man endlich die Coefficienten

$$c_{1,i},\; c_{2,i}, \ldots, c_{n,i}$$

oder

$$c_{k,1},\; c_{k,2}, \ldots, c_{k,n}$$

mit entgegengesetzten Zeichen versieht, so wechselt die Determinante der Substitution ihr Zeichen (§. 3, 1), während die characteristischen Gleichungen (5, I. V)

$$\begin{aligned} c_{1,i}^2 + c_{2,i}^2 + \ldots + c_{n,i}^2 &= 1 \\ c_{1,i}\, c_{1,k} + c_{2,i}\, c_{2,k} + \ldots + c_{n,i}\, c_{n,k} &= 0 \end{aligned}$$

oder
$$c_{k,1}^2 + c_{k,2}^2 + \cdots + c_{k,n}^2 = 1$$
$$c_{k,1}\, c_{i,1} + c_{k,2}\, c_{i,2} + \cdots + c_{k,n}\, c_{i,n} = 0$$
keine Veränderung erleiden.

Beispiele. Für $n = 2$ findet man
$$B = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2.$$
Die Coefficienten der einzelnen Elemente in B sind
$$\begin{matrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1. \end{matrix}$$
Daher sind die Coefficienten einer binären orthogonalen Substitution von der Determinante 1 folgende:
$$\begin{matrix} \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} & \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \\ -\frac{2\lambda}{1+\lambda^2} & \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}. \end{matrix}$$
Die Determinante hat den Werth -1, wenn die Coefficienten der Substitution folgende sind:
$$\begin{matrix} \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} & \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \\ \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} & -\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}. \end{matrix}$$
Für $n = 3$ findet man (§. 8, 7)
$$B = \begin{vmatrix} 1 & \nu & -\mu \\ -\nu & 1 & \lambda \\ \mu & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$$
Die Coefficienten der einzelnen Elemente in B sind
$$\begin{matrix} 1+\lambda^2 & \nu+\lambda\mu & -\mu+\lambda\nu \\ -\nu+\lambda\mu & 1+\mu^2 & \lambda+\mu\nu \\ \mu+\lambda\nu & -\lambda+\mu\nu & 1+\nu^2. \end{matrix}$$
Demnach findet man folgende Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution von der Determinante 1:
$$\begin{matrix} \frac{1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2}{B} & 2\frac{\nu+\lambda\mu}{B} & 2\frac{-\mu+\lambda\nu}{B} \\ 2\frac{-\nu+\lambda\mu}{B} & \frac{1+\mu^2-\nu^2-\lambda^2}{B} & 2\frac{\lambda+\mu\nu}{B} \\ 2\frac{\mu+\lambda\nu}{B} & 2\frac{-\lambda+\mu\nu}{B} & \frac{1+\nu^2-\lambda^2-\mu^2}{B}, \end{matrix}$$
wie schon EULER in der zuerst erwähnten Abhandlung p. 101 angegeben hat. Diese Coefficienten sind von RODRIGUES (Liouv. J. 5 p. 405) aus denselben Formeln abgeleitet worden, welche EULER (Nov. Comm. Petrop. 20 p. 217) zur Transformation eines dreirechtwinkeligen Coordinatensystems aufgestellt hatte.

Um die Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution von der Determinante -1 zu erhalten, braucht man nur im obigen System die Zeichen von einer oder drei horizontalen Reihen oder von eben so viel verticalen Reihen zu verändern.

Für $n=4$ findet man (§. 8, 7)

$$B=\begin{vmatrix} \omega & a & b & c \\ -a & \omega & h & -g \\ -b & -h & \omega & f \\ -c & g & -f & \omega \end{vmatrix} = (\omega^2+a^2+b^2+c^2+f^2+g^2+h^2+\vartheta^2)\,\omega^2,\quad \omega\vartheta = af+bg+ch.$$

$$\begin{aligned}
\beta_{11} &= (\omega^2+f^2+g^2+h^2)\,\omega^2 & \beta_{12} &= (a\omega+f\vartheta-bh+cg)\,\omega \\
\beta_{21} &= (-a\omega-f\vartheta+cg-bh)\,\omega & \beta_{22} &= (\omega^2+f^2+b^2+c^2)\,\omega^2 \\
\beta_{31} &= (-b\omega-cf-g\vartheta+ah)\,\omega & \beta_{32} &= (-h\omega+fg-ab-c\vartheta)\,\omega \\
\beta_{41} &= (-c\omega+bf-ag-h\vartheta)\,\omega & \beta_{42} &= (g\omega+fh+b\vartheta-ca)\,\omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{13} &= (b\omega+g\vartheta-cf+ah)\,\omega & \beta_{14} &= (c\omega+h\vartheta-ag+bf)\,\omega \\
\beta_{23} &= (h\omega+fg+c\vartheta-ab)\,\omega & \beta_{24} &= (-g\omega+hf-ac-b\vartheta)\,\omega \\
\beta_{33} &= (\omega^2+g^2+c^2+a^2)\,\omega^2 & \beta_{34} &= (f\omega+gh+a\vartheta-bc)\,\omega \\
\beta_{43} &= (-f\omega+gh-bc-a\vartheta)\,\omega & \beta_{44} &= (\omega^2+h^2+a^2+b^2)\,\omega^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Bc_{11} &= [\omega^2-\vartheta^2+f^2-a^2+g^2-b^2+h^2-c^2]\,\omega^2 \\
Bc_{22} &= [\omega^2-\vartheta^2+f^2-a^2-(g^2-b^2)-(h^2-c^2)]\,\omega^2 \\
Bc_{33} &= [\omega^2-\vartheta^2-(f^2-a^2)+(g^2-b^2)-(h^2-c^2)]\,\omega^2 \\
Bc_{44} &= [\omega^2-\vartheta^2-(f^2-a^2)-(g^2-b^2)+(h^2-c^2)]\,\omega^2
\end{aligned}$$

u. s. f. Mit Hülfe dieser Formeln lassen sich ohne Weiteres die Coefficienten einer quaternären orthogonalen Substitution von der Determinante 1 oder -1 aufstellen.

Cayley's System dieser Coefficienten in Crelle J. 32 p. 122 enthält zwei Fehler (in β_{24} steht $-hf$ statt hf, in Bc_{11}, Bc_{22},.. steht 1 statt $1-\vartheta^2$), welche in der neueren Mittheilung Cayley's Crelle J. 50 p. 311 nicht vorkommen. Dagegen ist an dem zuletzt erwähnten Orte p. 312 Z. 5 v. o. der Druckfehler $+\delta\gamma'$ in $-\delta\gamma'$ zu verbessern. Die von Cayley gefundenen Coefficienten einer quaternären orthogonalen Substitution kommen in anderer Form bei Euler (Nov. Comm. Petrop. 15 p. 102) vor, der sie »nulla certa methodo, sed potius quasi divinando« erhalten hatte. Euler fügt hinzu: »si quis viam directam ad hanc solutionem manuducentem investigaverit, insignia certe subsidia analysi attulisse erit censendus.« Es ist Cayley nicht entgangen, wie sich aus den von ihm aufgestellten Coefficienten die Euler'sche Lösung ableiten lasse (vergl. Crelle J. 50 p. 312). Setzt man im obigen System

$$\omega = -\frac{s+d}{2},\quad f=\frac{r+c}{2},\quad g=-\frac{q+b}{2},\quad h=\frac{p+a}{2},$$

$$\vartheta = \frac{s-d}{2},\quad a=\frac{r-c}{2},\quad b=-\frac{q-b}{2},\quad c=\frac{p-a}{2},$$

und ändert die Zeichen der letzten Horizontalreihe, wodurch die Determinante der orthogonalen Substitution den Werth -1 annimmt, so erhält man Euler's System ohne irgend eine Abweichung. Denn das zweite Element der zweiten Horizontalreihe enthält bei Euler nur durch einen Druckfehler $-ds$ statt $+ds$.

7. Die binäre und ternäre orthogonale Substitution ist in der Geometrie gleichbedeutend mit der Transformation der orthogonalen Punktcoordinaten. Um von dem orthogonalen System x, y zu dem orthogonalen System x', y' über-

zugehen, unter der Voraussetzung, dass x, y, x', y' Richtungen einer Ebene sind, hat man die lineare Substitution zu machen, deren Coefficienten

$$\begin{matrix} \cos xx' & \cos xy' \\ \cos yx' & \cos yy' \end{matrix}$$

sind. Wenn die Winkel von gleichen Zeichen durch Drehungen von einerlei Sinn beschrieben werden, mithin $xy + yx = 0$ ist, so hat man

$$xy' = xx' + x'y', \quad yx' = yx + xx', \quad yy' = yx + xx' + x'y'.$$

Sind nun die Winkel xy und $x'y'$ beide $= 90^0$, so ist

$$\cos xy' = -\sin xx', \ \cos yx' = \sin xx', \ \cos yy' = \cos xx'.$$

Wenn dagegen $xy = 90^0$ und $x'y' = -90^0$ ist, so ist

$$\cos xy' = \sin xx', \ \cos yx' = \sin xx', \ \cos yy' = -\cos xx'.$$

Daher hat man, wie bekannt, beim Uebergange zu einem System desselben Sinnes die lineare Substitution

$$\begin{matrix} \cos xx' & -\sin xx' \\ \sin xx' & \cos xx' \end{matrix}$$

von der Determinante 1 zu machen; beim Uebergange zu einem System entgegengesetzten Sinnes ist die erforderliche Substitution

$$\begin{matrix} \cos xx' & \sin xx' \\ \sin xx' & -\cos xx' \end{matrix}$$

von der Determinante -1.

Dies stimmt damit überein, dass für beliebige Richtungen einer Ebene x, y, x', y' nach einem bekannten goniometrischen Theorem (s. unten §. 17, 1)

$$\begin{vmatrix} \cos xx' & \cos xy' \\ \cos yx' & \cos yy' \end{vmatrix} = \sin xy \sin x'y',$$

folglich ist diese Determinante positiv oder negativ, je nachdem $\sin xy$ und $\sin x'y'$ einerlei Zeichen haben oder nicht.

Umgekehrt schliesst man aus den Gleichungen

$$\cos^2 xx' + \cos^2 xy' = 1, \quad \cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy' = 0,$$
$$\cos^2 yx' + \cos^2 yy' = 1,$$

dass $\sin^2 xy$ und $\sin^2 x'y'$ den Werth 1 haben. Denn nach der Multiplicationsregel (§. 6, 4) ist

$$\sin^2 xy \sin^2 x'y' = \begin{vmatrix} \cos xx' & \cos xy' \\ \cos yx' & \cos yy' \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} \cos^2 xx' + \cos^2 xy' & \cos yx' \cos xx' + \cos xy' \cos yy' \\ \cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy' & \cos^2 yx' + \cos^2 yy' \end{vmatrix} = 1.$$

Um die angegebenen Substitutionen zu rationalisiren, braucht man nur $\cos xx' = \cos^2 \frac{xx'}{2}\left(1 - \tang^2 \frac{xx'}{2}\right)$ u. s. w. zu benutzen und die Coefficienten der Substitution durch $\tang \frac{xx'}{2}$ ausdrücken. Vergl. (6) Beispiel 1.

8. Um von dem orthogonalen Coordinatensystem x, y, z zu dem orthogonalen System x', y', z' überzugehen, hat man bekanntlich die lineare Substitution

$$\begin{matrix} \cos xx' & \cos xy' & \cos xz' \\ \cos yx' & \cos yy' & \cos yz' \\ \cos zx' & \cos zy' & \cos zz' \end{matrix}$$

zu machen, deren Coefficienten den Gleichungen (5, I) genügen müssen, mithin Functionen von 3 unbestimmten Grössen sind. Bezeichnet O den gemeinschaftlichen Anfang der Coordinaten und wird die Kugel, deren Centrum O und deren Radius die Längeneinheit ist, von den Richtungen der positiven Coordinaten in X, Y, Z, X', Y', Z' geschnitten, so sind die Coordinatensysteme desselben oder entgegengesetzten Sinnes, je nachdem die sphärischen Dreiecke XYZ und $X'Y'Z'$, oder die Tetraeder $OXYZ$ und $OX'Y'Z'$ desselben oder entgegengesetzten Sinnes sind.

I. Bei zwei sphärischen Figuren, wenn sie gleich und ähnlich und desselben Sinnes sind, giebt es einen sich selbst entsprechenden Punkt S von solcher Lage, dass

$$SX = SX', \qquad SY = SY', \qquad SZ = SZ',$$
$$\text{Winkel } XSY = X'SY', \quad YSZ = Y'SZ', \quad XSZ = X'SZ',$$
$$XSX' = YSY' = ZSZ' \text{ *)}.$$

Nach einem elementaren Satze der sphärischen Trigonometrie hat man daher, wenn OS durch s und der Winkel XSX' durch φ bezeichnet wird,

$$\cos xx' = \cos^2 sx + \sin^2 sx \cos\varphi = \cos^2 sx\,(1 - \cos\varphi) + \cos\varphi$$
$$\cos yy' = \cos^2 sy + \sin^2 sy \cos\varphi = \cos^2 sy\,(1 - \cos\varphi) + \cos\varphi$$
$$\cos zz' = \cos^2 sz + \sin^2 sz \cos\varphi = \cos^2 sz\,(1 - \cos\varphi) + \cos\varphi.$$

Wenn man ferner die gleichen Winkel XSY und $X'SY'$ durch ϑ bezeichnet, so hat man nach demselben Satze der Trigonometrie

$$\cos xy' = \cos sx \cos sy' + \sin sx \sin sy' \cos(\varphi + \vartheta)$$
$$= \cos sx \cos sy + \sin sx \sin sy \cos\varphi \cos\vartheta - \sin sx \sin sy \sin\varphi \sin\vartheta.$$

Da aber

$$\cos xy = \cos sx \cos sy + \sin sx \sin sy \cos\vartheta = 0,$$
$$\sin sx \sin sy \sin\vartheta = 6\ OXYS = \sin xy \cos sz = \cos sz,$$

so erhält man

$$\cos xy' = \cos sx \cos sy\,(1 - \cos\varphi) - \cos sz \sin\varphi.$$

Aus dem Werthe von $\cos xy'$ findet man $\cos yx'$, weil Winkel $YSX' = YSX + XSX' = -\varphi + \vartheta$ ist, durch Vertauschung von φ mit $-\varphi$

$$\cos yx' = \cos sx \cos sy\,(1 - \cos\varphi) + \cos sz \sin\varphi.$$

Ebenso ist

$$\cos yz' = \cos sy \cos sz\,(1 - \cos\varphi) - \cos sx \sin\varphi$$
$$\cos zy' = \cos sy \cos sz\,(1 - \cos\varphi) + \cos sx \sin\varphi$$
$$\cos zx' = \cos sz \cos sx\,(1 - \cos\varphi) - \cos sy \sin\varphi$$
$$\cos xz' = \cos sz \cos sx\,(1 - \cos\varphi) + \cos sy \sin\varphi \text{ **)},$$

---

*) Vergl. des Verf. Abhandlung über die Gleichheit und Aehnlichkeit u. s. w. Dresden 1852, §. 31 u. 52, wo unter den Citaten Euler de centro similitudinis (Nova Acta Petrop. 9 p. 154) nachzutragen ist.

**) Dies sind die von Euler Nov. Comm. Petrop. 20 p. 217 gefundenen Formeln, welche Jacobi Crelle J. 2 p. 188 in Erinnerung gebracht hat mit der Aufforderung, dieselben einfacher abzuleiten.

wo von den verfügbaren Grössen sx, sy, sz, φ die ersteren durch die Gleichung

$$\cos^2 sx + \cos^2 sy + \cos^2 sz = 1$$

unter einander verbunden sind.

Um diese Substitutionscoefficienten zu rationalisiren, führt man $\frac{1}{2}\varphi$ ein und erhält

$$\cos xx' = \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi + 2\cos^2 sx \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi - \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi$$
$$\cos xy' = 2\cos sx \cos sy \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi - 2\cos sz \sin \tfrac{1}{2}\varphi \cos \tfrac{1}{2}\varphi$$

u. s. f. Setzt man

$$\cos sx \tang \tfrac{1}{2}\varphi = \lambda, \quad \cos sy \tang \tfrac{1}{2}\varphi = \mu, \quad \cos sz \tang \tfrac{1}{2}\varphi = \nu,$$

mithin

$$\tang^2 \tfrac{1}{2}\varphi = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2, \quad \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\varphi} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2,$$

so erhält man das obige System rationaler Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution (6).

II. Bei zwei sphärischen Figuren, wenn sie gleich und ähnlich und entgegengesetzten Sinnes sind, giebt es einen sich selbst entsprechenden Hauptkreis, dessen Pol S seinem Gegenpunkt entspricht, so dass

$$SX + SX' = 180^0, \quad SY + SY' = 180^0, \quad SZ + SZ' = 180^0,$$
$$\text{Winkel } XSY = X'SY', \quad YSZ = Y'SZ' \quad XSZ = X'SZ',$$
$$XSX' = YSY' = ZSZ'.$$

Unter Annahme der vorigen Bezeichnungen hat man

$$\cos xx' = -\cos^2 sx + \sin^2 sx \cos\varphi = -\cos^2 sx\,(1 + \cos\varphi) + \cos\varphi$$
$$\cos xy' = -\cos sx \cos sy + \sin sx \sin sy \cos(\varphi + \vartheta)$$
$$= -\cos sx \cos sy\,(1 + \cos\varphi) - \cos sz \sin\varphi$$

u. s. w. Diese Formeln unterscheiden sich von den im vorigen Falle gefundenen nur durch die Zeichen, nachdem φ mit $180^0 - \varphi$ vertauscht worden ist. Der Winkel $180^0 - \varphi$ ist aber derjenige, welchen das System x', y', z' um die Axe s beschreiben muss, damit $X'Y'Z'$ mit der Gegenfigur von XYZ zusammenfalle.

III. Nach v. Staudt's Theorem (s. unten §. 17, 6) ist für beliebige Winkel und Lagen der coordinirten Axen

$$\begin{vmatrix} \cos xx' & \cos xy' & \cos xz' \\ \cos yx' & \cos yy' & \cos yz' \\ \cos zx' & \cos zy' & \cos zz' \end{vmatrix} = 36\, OXYZ . OX'Y'Z'.$$

Folglich ist die Determinante positiv oder negativ, je nachdem diese Tetraeder oder die von den Axen gebildeten Ecken desselben oder entgegengesetzten Sinnes sind. Bei einem orthogonalen System beträgt aber das zugehörige Tetraeder $\frac{1}{6}$ Cubikeinheit, daher ist die Determinante der orthogonalen Substitution 1 oder -1, je nachdem das neue System mit dem alten desselben oder entgegengesetzten Sinnes ist*).

*) Auf diesen Unterschied der Substitutionsdeterminanten hat Jacobi Crelle J. 15 p. 309 aufmerksam gemacht. Vergl. Möbius Statik §. 127, Magnus anal.-Geom. des Raumes §. 13.

IV. Umgekehrt schliesst man aus den Gleichungen

$$\cos^2 xx' + \cos^2 xy' + \cos^2 xz' = 1$$
$$\cos^2 yx' + \cos^2 yy' + \cos^2 yz' = 1$$
$$\cos^2 zx' + \cos^2 zy' + \cos^2 zz' = 1$$

$$\cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy' + \cos xz' \cos yz' = 0$$
$$\cos xx' \cos zx' + \cos xy' \cos zy' + \cos xz' \cos zz' = 0$$
$$\cos yx' \cos zx' + \cos yy' \cos zy' + \cos yz' \cos zz' = 0,$$

dass die Systeme x, y, z und x', y', z' orthogonal sind *). Denn

$$(36\, OXYZ.OX'Y'Z')^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

worin nach der Regel für die Multiplication der Determinanten (§. 6, 4)

$$a_{11} = \cos xx' \cos xx' + \cos xy' \cos xy' + \cos xz' \cos xz' = 1$$
$$a_{12} = \cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy' + \cos xz' \cos yz' = 0$$

u. s. w., so dass

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Nun ist $6\, OXYZ = \sin xy \sin xz \sin (xy^\wedge xz)$ u. s. w. Das Product der Sinus wird aber nur dann 1, wenn die Winkel rechte sind.

9. Wenn $c_{1,1}, \ldots, c_{n,n}$ die Coefficienten einer orthogonalen Substitution bedeuten, deren Determinante ε d. i. entweder 1 oder -1 ist, wenn

$$f(z) = \begin{vmatrix} c_{1,1} + z & c_{1,2} & \ldots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} + z & \ldots & c_{2,n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \ldots & c_{n,n} + z \end{vmatrix},$$

so ist die Gleichung $f(z) = 0$ reciprok und hat mit Ausnahme der Wurzel $-\varepsilon$, welche bei ungeradem n vorhanden ist, keine reellen Wurzeln **).

Beweis. Die Entwickelung der Determinante $f(z)$ nach steigenden Potenzen von z (§. 4, 4) giebt vermöge der in (5, VI) bewiesenen Eigenschaft der zu $f(0)$ gehörigen partiellen Determinanten ohne Weiteres zu erkennen, dass die Coefficienten von $z^0, z^1, z^2, \ldots$ von den Coefficienten von $z^n, z^{n-1}, z^{n-2}, \ldots$ sich nur durch den Factor ε unterscheiden, dass also

$$\frac{\varepsilon f(z)}{z^n} = f\left(\frac{1}{z}\right),$$

was sich durch Multiplication der Determinanten ε und $f(z)$ bestätigen lässt. Demnach ist $f(-\varepsilon) = (-1)^n \varepsilon^{n-1} f(-\varepsilon)$, also muss $f(-\varepsilon)$ identisch verschwinden, wenn n eine ungerade Zahl ist. Um über die Realität der übrigen Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ Aufschluss zu erhalten, bilde man das Product der Determinanten (§. 6, 4)

*) Dedekind Crelle J. 50 p. 272. **) Brioschi Liouv. J. 19 p. 253.

$$f(z)\,f(-z) = \begin{vmatrix} d_{1,1}-z^2 & z\,d_{1,2} & \dots & z\,d_{1,n} \\ z\,d_{2,1} & d_{2,2}-z^2 & \dots & z\,d_{2,n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ z\,d_{n,1} & z\,d_{n,2} & \dots & d_{n,n}-z^2 \end{vmatrix},$$

worin

$$d_{i,i}-z^2 = c_{i,1}\,c_{i,1} + \dots + (c_{i,i}+z)(c_{i,i}-z) + \dots + c_{i,n}\,c_{i,n},$$

folglich $d_{i,i} = 1$ (5, I) und

$$z\,d_{i,k} = c_{i,1}\,c_{k,1} + \dots + (c_{i,i}+z)\,c_{k,i} + \dots + c_{i,k}\,(c_{k,k}-z) + \dots + c_{i,n}\,c_{k,n},$$

folglich $d_{i,k} = c_{k,i} - c_{i,k}$, so dass $d_{i,k} + d_{k,i} = 0$. Daher ist (§. 8, 7)

$$\frac{f(z)\,f(-z)}{z^n} = \begin{vmatrix} \frac{1}{z}-z & d_{1,2} & \dots & d_{1,n} \\ d_{2,1} & \frac{1}{z}-z & \dots & d_{2,n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ d_{n,1} & d_{n,2} & \dots & \frac{1}{z}-z \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{z}-z\right)^n + \left(\frac{1}{z}-z\right)^{n-2} \Sigma D_2 + \dots,$$

worin die a. a. O. näher beschriebenen Coefficienten der Potenzen von $\frac{1}{z}-z$ positiv sind. Wenn nun z reell ist, so ist für gerade oder ungerade n

$$\frac{f(z)\,f(-z)}{z^n} \text{ oder } \frac{f(z)\,f(-z)}{z^n\left(\frac{1}{z}-z\right)}$$

positiv, folglich $f(z)$ von Null verschieden.

10. Eine gegebene ganze homogene Function zweiten Grades von n Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$V = \sum_{i,k} a_{i,k}\,x_i\,x_k, \text{ worin } a_{i,k} = a_{k,i},$$

kann nach Auflösung einer Gleichung n^{ten} Grades durch eine bestimmte orthogonale Substitution in eine ganze homogene Function von n Variablen transformirt werden, welche nur die Quadrate der neuen Variablen enthält *).

Beweis. Durch die $\frac{n(n-1)}{2}$ Bedingungen, dass die Producte von je zwei unter den Variablen der transformirten Function verschwinden sollen, ist die zur Transformation dienende orthogonale Substitution bestimmt (6). Bei der orthogonalen Substitution

$$x_i = c_{i,1}\,y_1 + \dots + c_{i,n}\,y_n$$

ist aber (5, II)

$$y_i = c_{1,i}\,x_1 + \dots + c_{n,i}\,x_n.$$

Wenn nun durch dieselbe

$$\sum_{i,k} a_{i,k}\,x_i\,x_k = g_1\,y_1^2 + g_2\,y_2^2 + \dots + g_n\,y_n^2$$

wird, so muss für alle Werthe von $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\sum_{i,k} a_{i,k}\,x_i\,x_k = g_1\,(c_{1,1}\,x_1 + \dots + c_{n,1}\,x_n)^2 + \dots + g_n\,(c_{1,n}\,x_1 + \dots + c_{n,n}\,x_n)^2$$

werden, also

$$a_{i,k} = g_1\,c_{i,1}\,c_{k,1} + g_2\,c_{i,2}\,c_{k,2} + \dots + g_n\,c_{i,n}\,c_{k,n}.$$

---

*) Cauchy Exerc. de Math. 4 p. 140. Jacobi Crelle J. 12 p. 1. Lebesgue Liouv. J. 2 p. 337. Auf diesem Satze beruht analytisch die Existenz der orthogonalen Hauptaxen bei Linien und Flächen zweiten Grades, deren Centrum in endlicher Ferne liegt.

Nachdem man die Gleichungen

$$a_{i,1} = g_1\, c_{i,1}\, c_{1,1} + \ldots + g_n\, c_{i,n}\, c_{1,n}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_{i,n} = g_1\, c_{i,1}\, c_{n,1} + \ldots + g_n\, c_{i,n}\, c_{n,n}$$

der Reihe nach mit $c_{1,k}, c_{2,k}, \ldots, c_{n,k}$ multiplicirt hat, findet man durch Addition nach (5, I)

$$a_{i,1}\, c_{1,k} + \ldots + a_{i,n}\, c_{n,k} = g_k\, c_{i,k}\,.$$

Aus dem linearen System

$$\begin{array}{llll} c_{1,k}(a_{1,1} - g_k) & + c_{2,k}\, a_{1,2} & + \ldots + c_{n,k}\, a_{1,n} & = 0 \\ c_{1,k}\, a_{2,1} & + c_{2,k}(a_{2,2} - g_k) & + \ldots + c_{n,k}\, a_{2,n} & = 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ c_{1,k}\, a_{n,1} & + c_{2,k}\, a_{n,2} & + \ldots + c_{n,k}(a_{n,n} - g_k) & = 0 \end{array}$$

folgt endlich (§. 9, 3 und §. 7, 5)

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - g_k & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - g_k & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} - g_k \end{vmatrix} = 0,$$

$$c_{1,k} : c_{2,k} : c_{3,k} : \ldots = \sqrt{\varphi_1(g_k)} : \sqrt{\varphi_2(g_k)} : \sqrt{\varphi_3(g_k)} : \ldots,$$

wo $\varphi_i(z)$ den Coefficienten von $a_{i,i} - z$ in der Determinante

$$f(z) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - z & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - z & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} - z \end{vmatrix}$$

bedeutet. Weil aber

$$c_{1,k}^2 + c_{2,k}^2 + \ldots + c_{n,k}^2 = 1$$

ist, so hat man zur Bestimmung der Coefficienten der erforderlichen orthogonalen Substitution

$$\begin{array}{l} c_{1,k} : c_{2,k} : \ldots : c_{n,k} : 1 \\ = \sqrt{\varphi_1(g_k)} : \sqrt{\varphi_2(g_k)} : \ldots : \sqrt{\varphi_n(g_k)} : \sqrt{\varphi_1(g_k) + \ldots + \varphi_n(g_k)}. \end{array}$$

Die Grössen $g_1, g_2, \ldots, g_n$ sind die Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades $f(z) = 0$. Keine derselben kann verschwinden. Denn $f(0)$ ist die (von Hesse sogenannte) Determinante der quadratischen Function V und die Identität $f(0) = 0$ würde anzeigen, dass V in Wahrheit eine Function von weniger als n Variablen wäre (§. 13, 3).

Keine Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ kann imaginär oder complex sein. Zufolge der obigen Proportionen und der Gleichung

$$c_{1,i}\, c_{1,k} + c_{2,i}\, c_{2,k} + \ldots + c_{n,i}\, c_{n,k} = 0$$

ist nämlich für jedes Paar Wurzeln g_i und g_k

$$\sqrt{\varphi_1(g_i)}\, \sqrt{\varphi_1(g_k)} + \ldots + \sqrt{\varphi_n(g_i)}\, \sqrt{\varphi_n(g_k)} = 0.$$

Wäre nun $g_i = p + q\sqrt{-1}$ und $\sqrt{\varphi_r(g_i)} = P_r + Q_r\sqrt{-1}$, so gäbe es eine andere Wurzel $g_k = p - q\sqrt{-1}$, folglich $\sqrt{\varphi_r(g_k)} = P_r - Q_r\sqrt{-1}$. Daher wäre

$$\sqrt{\varphi_r(g_i)}\, \sqrt{\varphi_r(g_k)} = P_r^2 + Q_r^2$$

und die Summe solcher Producte könnte nicht verschwinden, ohne dass $\varphi_r(g_i)$ für $r = 1, 2, .., n$ verschwände. Nun ist $\varphi_r(z)$ eine Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von derselben Art als $f(z)$ und kann daher für $z = g_i$ nur dann verschwinden, wenn Functionen niederer Grade derselben Art verschwinden, was für Functionen ersten Grades unmöglich ist.

In dem Falle, dass zwei oder mehr Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ einander gleich werden, ist die verlangte Transformation der Function V nicht vollkommen bestimmt, weil zwei oder mehr parallele Reihen von Substitutionscoefficienten die Werthe $\frac{0}{0}$ erhalten. Wenn nämlich g_k eine zweifache Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ ist, so hat man vermöge der vorbemerkten Gleichung

$$\varphi_1(g_k) + \varphi_2(g_k) + .. + \varphi_n(g_k) = 0$$

in Uebereinstimmung mit der nach §. 3, 10 zu entwickelnden Bedingung $f'(g_k) = 0$ (§. 12, 10). Die Grössen $\varphi_1(g_k), \varphi_2(g_k), ..$ sind von einerlei Zeichen, weil das Product von je zweien unter ihnen ein positives Quadrat ist (§. 7, 5). Also kann ihre Summe nur dann verschwinden, wenn jede einzeln verschwindet. In den für $c_{1,k}, c_{2,k}, .., c_{n,k}$ gefundenen Brüchen verschwinden demnach sowohl die Zähler, als die Nenner.

Anmerkung. Durch die obige Transformation der Function V erkennt man die Maxima und Minima, welche die gegebene Function hat, wenn die Variablen an die Bedingung $x_1^2 + x_2^2 + .. + x_n^2 = 1$ gebunden sind. Weil hierbei $y_1^2 + y_2^2 + .. + y_n^2 = 1$ wird, so ist

$$\begin{aligned} V &= g_1 y_1^2 + g_2 y_2^2 + .. + g_n y_n^2 \\ &= g_k + (g_1 - g_k) y_1^2 + .. + (g_n - g_k) y_n^2. \end{aligned}$$

Hieraus erhellt, dass V nicht grösser (kleiner) als g_k werden kann, wenn g_k die grösste (kleinste) unter den Grössen $g_1, g_2, .., g_n$ bedeutet. Die Function V erreicht diesen ausgezeichneten Werth, wenn $y_1 = 0, y_2 = 0, .., y_k = 1, .., y_n = 0$, d. h. wenn

$$x_1 = c_{1,k}, \; x_2 = c_{2,k}, .., \; x_n = c_{n,k}.$$

Bei directer Behandlung dieses Problems hat man die Bedingungen

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 2\mu x_1, \; \frac{\partial V}{\partial x_2} = 2\mu x_2, .., \; \frac{\partial V}{\partial x_n} = 2\mu x_n$$

zu erfüllen, wobei

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = 2 a_{i,1} x_1 + 2 a_{i,2} x_2 + .. + 2 a_{i,n} x_n,$$

folglich

$$a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + .. + a_{i,n} x_n = \mu x_i.$$

Diese Gleichung stimmt mit der oben gefundenen

$$a_{i,1} c_{1,k} + a_{i,2} c_{2,k} + .. + a_{i,n} c_{n,k} = g_k c_{i,k}$$

überein, wenn die Unbekannte μ durch g_k und die Unbekannten $x_1, x_2, .., x_n$ durch $c_{1,k}, c_{2,k}, .., c_{n,k}$ ersetzt werden.

11. Die durch die Realität ihrer Wurzeln ausgezeichnete Gleichung $f(z) = 0$ (10) kommt bei mehreren Untersuchungen vor, namentlich bei der Bestimmung der Hauptaxen von Linien und Flächen zweiten Grades, bei der Bestimmung der

mechanischen Hauptaxen eines gegebenen Körpers, bei der Bestimmung der säcularen Störungen von Planeten (LAPLACE Mém. de l'Acad. de Paris 1772, II p. 293 u. 362). Für eine solche Gleichung dritten Grades hat LAGRANGE (Mém. de l'Acad. de Berlin 1773 p. 108) die Realität ihrer Wurzeln bewiesen, für eine Gleichung derselben Art beliebigen Grades hat CAUCHY (l. c.) dasselbe geleistet. Auf einem neuen und directen Wege ist von KUMMER (Crelle J. 26 p. 268. Vergl. JACOBI Crelle J. 30 p. 46) bei Gleichungen dritten Grades der erwähnten Art, von BORCHARDT (Liouv. J. 12 p. 50) bei Gleichungen beliebigen Grades derselben Art die Realität ihrer Wurzeln nachgewiesen werden. Einen nicht minder directen Beweis der mehr erwähnten Eigenschaft hat SYLVESTER (Philos. Mag. 1852, II p. 138) geführt, wie folgt *).

Wenn $a_{i,k} = a_{k,i}$ und

$$f(z) = \begin{vmatrix} a_{1,1}-z & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-z & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n}-z \end{vmatrix},$$

so ist

$$f(z)\,f(-z) = \begin{vmatrix} b_{1,1}-z^2 & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2}-z^2 & \dots & b_{2,n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,n}-z^2 \end{vmatrix},$$

worin nach der Regel für die Multiplication der Determinanten (§. 6, 4)

$$b_{i,i}-z^2 = a_{i,1}\,a_{i,1} + \dots + (a_{i,i}-z)(a_{i,i}+z) + \dots + a_{i,n}\,a_{i,n},$$
$$b_{i,k} = a_{i,1}\,a_{k,1} + \dots + (a_{i,i}-z)\,a_{k,i} + \dots + a_{i,k}\,(a_{k,k}+z) + \dots + a_{i,n}\,a_{k,n},$$

mithin

$$b_{i,i} = a_{i,1}\,a_{i,1} + \dots + a_{i,n}\,a_{i,n}$$
$$b_{i,k} = a_{i,1}\,a_{k,1} + \dots + a_{i,n}\,a_{k,n} = b_{k,i}.$$

Die Determinante $f(z)\,f(-z)$, nach §. 4, 4 entwickelt, giebt

$$R_n - z^2 \Sigma R_{n-1} + \dots + (-z^2)^{n-1} \Sigma R_1 + (-z^2)^n,$$

worin jede der Grössen R_m z. B.

$$\begin{vmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,m} \\ \cdot & & \cdot \\ b_{m,1} & \dots & b_{m,m} \end{vmatrix}$$

nach §. 6, 2 eine Summe von Quadraten ist. Daher ist $f(q\sqrt{-1})\,f(-q\sqrt{-1})$ für jeden Werth q positiv, also $q\sqrt{-1}$ keine Wurzel der Gleichung $f(z)=0$.

Wenn man ferner $z = p + z'$ setzt und $f(z)$ in $F(z')$ verwandelt, so ist aus den vorigen Gründen $q\sqrt{-1}$ keine Wurzel der Gleichung $F(z')=0$, folglich $p+q\sqrt{-1}$ keine Wurzel der Gleichung $f(z)=0$. Die Gleichung $f(z)=0$ hat also nur reelle Wurzeln.

---

*) Zur Literatur des vorliegenden Problems gehören noch die Noten von SYLVESTER (Philos. Mag. 1853, II p. 214) und von HERMITE (Comptes rendus 1855 tome 41 p. 181).

§. 16. Die Dreiecksfläche und das Tetraëdervolum.

1. Wenn O den Anfang beliebiger coordinirter Axen bedeutet, wenn x, y und x_1, y_1 die den Axen parallelen Coordinaten der Punkte A und B sind und die Strecken OA, OB durch r, r_1 bezeichnet werden, wenn ferner die Dreiecksfläche OAB positiv oder negativ genommen wird, je nachdem die durch die Ordnung der Punkte O, A, B bestimmte Drehung mit der Drehung, wodurch positive Winkel beschrieben werden, von einerlei Sinn ist oder nicht, so ist

$$2\,OAB = rr_1 \sin rr_1 = \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \sin xy \text{ *)}.$$

Beweis. Es ergiebt sich unmittelbar aus der über das Zeichen der Dreiecksfläche gemachten Voraussetzung, dass $rr_1 \sin rr_1$ auch dem Zeichen nach mit $2\,OAB$ übereinstimmt. Man hat aber (§. 3, 2)

$$r^2 r_1^2 \sin^2 rr_1 = r^2 r_1^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos rr_1 \\ \cos rr_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} rr & rr_1 \cos rr_1 \\ rr_1 \cos rr_1 & r_1 r_1 \end{vmatrix}.$$

Nun ergiebt sich durch orthogonale Projection

$$\begin{aligned} r \cos xr &= x + y \cos xy \\ r \cos yr &= x \cos xy + y \\ r &= x \cos xr + y \cos yr \\ r_1 \cos rr_1 &= x_1 \cos xr + y_1 \cos yr. \end{aligned}$$

Nach der Multiplicationsregel (§. 6, 1) ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} x\,(x+y\cos xy)+y\,(x\cos xy+y) & x\,(x_1+y_1\cos xy)+y\,(x_1\cos xy+y_1) \\ x_1(x+y\cos xy)+y_1(x\cos xy+y) & x_1(x_1+y_1\cos xy)+y_1(x_1\cos xy+y_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x+y\cos xy & x\cos xy+y \\ x_1+y_1\cos xy & x_1\cos xy+y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos xy \\ \cos xy & 1 \end{vmatrix}.$$

Daher findet man, wenn ε entweder 1 oder -1 ist,

$$rr_1 \sin rr_1 = \varepsilon \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \sin xy.$$

Wenn y und x_1 verschwinden, so geht r in x, r_1 in y_1 über. Demnach ist $\varepsilon = 1$.

Anmerkung. Wenn der Punkt B dem Punkte A unendlich nahe liegt, so ist

$$\begin{aligned} r_1 &= r + dr \\ x_1 &= x + dx \\ y_1 &= y + dy. \end{aligned}$$

Indem man den Winkel xr durch ϑ bezeichnet, erhält man

$$2\,OAB = r^2\,d\vartheta = \begin{vmatrix} x & y \\ x+dx & y+dy \end{vmatrix} \sin xy = \begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} \sin xy$$

durch Anwendung von §. 3, 4.

---

*) Diese Formel kommt wahrscheinlich schon früher vor als bei MONGE J. de l'éc. polyt. Cah. 15 p. 68. Sie liegt der Formel für die Fläche eines Polygons zu Grunde, welche GAUSS in den Zusätzen zu SCHUMACHER's Uebersetzung von CARNOT géom. de position gegeben hat. Eine genaue geometrische Ableitung derselben findet man in MÖBIUS Statik §. 85.

2. Unter dem **Sinus des von 3 Richtungen** x, y, z **gebildeten Raumwinkels** (angulus solidus, dreikantige Ecke, Trieder) versteht man nach v. Staudt (Crelle J. 24 p. 252) den Factor, mit welchem das Product der an einer Ecke des Parallelepipeds liegenden Kanten multiplicirt werden muss, damit man das Volum des Parallelepipeds erhält. Bezeichnet man diesen Factor durch $\sin xyz$, so ist wie bekannt

$$\sin xyz = \sin xy \sin xy^\wedge z = \sin xy \sin xz \sin xy^\wedge xz,$$

wobei $xy^\wedge z$ und $xy^\wedge xz$ die Winkel der Ebene xy mit der Richtung z und der Ebene xz bedeuten. Nach Analogie der Gleichung

$$\sin^2 xy = \begin{vmatrix} 1 & \cos xy \\ \cos xy & 1 \end{vmatrix}$$

findet man

$$\sin^2 xyz = \begin{vmatrix} 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 - \cos^2 xy - \cos^2 xz - \cos^2 yz + 2\cos xy \cos xz \cos yz$$

$$= 4\sin\frac{xy+xz+yz}{2}\sin\frac{-xy+xz+yz}{2}\sin\frac{xy-xz+yz}{2}\sin\frac{xy+xz-yz}{2}.$$

Beweis. Aus der Gleichung

$$\sin xy \sin xz \cos xy^\wedge xz = \cos yz - \cos xy \cos xz$$

folgt

$$\sin^2 xyz = \begin{vmatrix} 1-\cos^2 xy & \cos yz - \cos xy \cos xz \\ \cos yz - \cos xy \cos xz & 1-\cos^2 xz \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos xy - \cos xy & \cos xz - \cos xz \\ \cos xy & 1-\cos^2 xy & \cos yz - \cos xy \cos xz \\ \cos xz & \cos yz - \cos xy \cos xz & 1-\cos^2 xz \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix}$$

durch Anwendung von §. 2, 6 und §. 3, 4. Diese Determinante nach §. 5, 2 entwickelt giebt die von Euler (Nov. Comm. Petrop. 4 p. 158) herrührende Formel, welche sich auf bekannte Weise in ein Product verwandeln lässt (Legendre Elém. de géom. Note V).

3. Wenn mehrere Tetraëder und deren Raumwinkel in Betrachtung gezogen werden, so ist zu unterscheiden, ob dieselben einerlei Sinnes sind oder nicht. Weil durch parallele Verschiebung der Sinn der Raumgrössen nicht verändert wird, so braucht man nur Raumwinkel zu vergleichen, deren Kanten x, y, z und r, r_1, r_2 von einem Punkt O ausgehen. Werden die Richtungen dieser Kanten (nicht die entgegengesetzten) von der Kugel, deren Centrum O und deren Radius die Längeneinheit ist, in X, Y, Z, R, R_1, R_2 geschnitten, so sind die Raumwinkel xyz und $r r_1 r_2$, sowie die Tetraëder $OXYZ$ und ORR_1R_2, einerlei Sinnes oder nicht, je nachdem die sphärischen Dreiecke XYZ und RR_1R_2 von O aus betrachtet einerlei Sinnes sind oder nicht. Im ersten Falle haben $\sin xyz = \sin xy \sin xy^\wedge z$ und $\sin rr_1r_2 = \sin rr_1 \sin rr_1{}^\wedge r_2$ einerlei Zeichen, weil bei

Raumwinkeln von einerlei Sinn $\sin xy{}^\wedge z$ und $\sin rr_1{}^\wedge r_2$ von einerlei Zeichen sein müssen oder nicht, je nachdem $\sin xy$ und $\sin rr_1$ von einerlei Zeichen sind oder nicht; im zweiten Falle haben diese Grössen entgegengesetzte Zeichen.

4. Wenn O den Anfang beliebiger coordinirter Axen bedeutet, wenn x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 die Coordinaten der Punkte A, B, C bedeuten und die Strecken OA, OB, OC durch r, r_1, r_2 bezeichnet werden, wenn endlich das Tetraëdervolum $OABC$ positiv oder negativ genommen wird, je nachdem $\sin rr_1r_2$ positiv oder negativ genommen wird, so ist

$$6\,OABC = rr_1r_2 \sin rr_1r_2 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \sin xyz\ ^{*)}.$$

Beweis. Nach (2) ist

$$r^2r_1^2r_2^2 \sin^2 rr_1r_2 = r^2r_1^2r_2^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos rr_1 & \cos rr_2 \\ \cos rr_1 & 1 & \cos r_1r_2 \\ \cos rr_2 & \cos r_1r_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} rr & r\,r_1 \cos rr_1 & r\,r_2 \cos rr_2 \\ rr_1 \cos rr_1 & r_1r_1 & r_1r_2 \cos r_1r_2 \\ rr_2 \cos rr_2 & r_1r_2 \cos r_1r_2 & r_2r_2 \end{vmatrix}.$$

Durch orthogonale Projection ergiebt sich aber

$$\begin{aligned} r \cos xr &= x + y \cos xy + z \cos xz = X \\ r \cos yr &= x \cos xy + y + z \cos yz = Y \\ r \cos zr &= x \cos xz + y \cos yz + z = Z \\ r &= x \cos xr + y \cos yr + z \cos zr \\ r_1 \cos rr_1 &= x_1 \cos xr + y_1 \cos yr + z_1 \cos zr \end{aligned}$$

u. s. w. Wenn nun X_1, Y_1, Z_1 in Bezug auf x_1, y_1, z_1, X_2, Y_2, Z_2 in Bezug auf x_2, y_2, z_2 die analoge Bedeutung haben, so ist

$$\begin{aligned} rr &= x\,X + y\,Y + z\,Z \\ rr_1 \cos rr_1 &= x_1 X + y_1 Y + z_1 Z \\ &= x\,X_1 + y\,Y_1 + z\,Z_1 \end{aligned}$$

u. s. w. Durch Anwendung von §. 6, 1 erhält man demnach statt der obigen Determinante das Product

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix}.$$

Daher ist, wenn ε entweder 1 oder -1 bedeutet,

$$r\,r_1r_2 \sin rr_1r_2 = \varepsilon \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \sin xyz.$$

Wenn unter den Coordinaten der in Betracht gezogenen Punkte nur x, y_1, z_2 von Null verschieden sind, während die übrigen verschwinden, so fällt r mit x, r_1

---

*) Lagrange sur les pyr. 14 (Mém. de l'acad. de Berlin 1773 p. 149). Monge l. c. Möbius Statik §. 68.

mit y, r_2 mit z zusammen und von der Determinante bleibt nur das Anfangsglied übrig (§. 2, 7). Demnach ist $\varepsilon = 1$.

Anmerkung. Vermöge der Sätze (1) und (4) können die einfachsten der in §. 3, 11 aufgestellten Identitäten geometrisch gedeutet werden.

5. Wenn die Punkte A, B, C in Bezug auf zwei Axen der Ebene ABC durch die Coordinaten x, y; x_1, y_1; x_2, y_2 gegeben sind, so ist

$$2\,ABC = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \sin xy \text{ *)}.$$

Beweis. In Bezug auf ein durch den Anfang A gelegtes System von Axen, welche mit gegebenen Axen einerlei Richtung haben, sind x_1-x, y_1-y; x_2-x, y_2-y die Coordinaten von B und C, daher ist (1)

$$2\,ABC = \begin{vmatrix} x_1-x & y_1-y \\ x_2-x & y_2-y \end{vmatrix} \sin xy.$$

Durch Anwendung von §. 2, 5 und §. 3, 4 erhält man statt dieser Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x-x & y-y \\ 1 & x_1-x & y_1-y \\ 1 & x_2-x & y_2-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Anmerkung. So oft man in der Formel ABC zwei Buchstaben permutirt, so vielmal wechselt die Dreiecksfläche das Zeichen. In der That erleidet die Determinante der Coordinaten durch Permutation von zwei horizontalen Reihen einen Zeichenwechsel (§. 2, 4). Durch Entwickelung der Determinante erhält man die bekannte Identität $ABC = OBC + OCA + OAB$.

Als Bedingung dafür, dass A auf der Geraden BC liegt, d. h. als Gleichung der Geraden durch B und C ergiebt sich, weil $ABC = 0$,

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Wenn die Punkte A, B, C, D in Bezug auf drei Axen durch die Coordinaten x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 gegeben sind, so ist

$$6\,ABCD = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \sin xyz \text{ **)}.$$

Beweis. Legt man durch A ein System von Axen, welche mit den gegebenen Axen einerlei Richtung haben, so sind in Bezug auf dieselben x_1-x, y_1-y, z_1-z; x_2-x, y_2-y, z_2-z; u. s. w. die Coordinaten von B, C, D, daher ist (4)

$$6\,ABCD = \begin{vmatrix} x_1-x & y_1-y & z_1-z \\ x_2-x & y_2-y & z_2-z \\ x_3-x & y_3-y & z_3-z \end{vmatrix} \sin xyz.$$

*) Diese bekannte Formel kommt in dieser Gestalt bei Joachimsthal Crelle J. 40 p. 23 vor.

**) Joachimsthal l. c.

Durch Anwendung von §. 2, 5 und §. 3, 4 erhält man für die mit sin xyz multiplicirte Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x-x & y-y & z-z \\ 1 & x_1-x & y_1-y & z_1-z \\ 1 & x_2-x & y_2-y & z_2-z \\ 1 & x_3-x & y_3-y & z_3-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Anmerkung. So oft man in der Formel $ABCD$ zwei Buchstaben permutirt, so vielmal wechselt das Tetraëdervolum zugleich mit der dafür gefundenen Determinante das Zeichen.

Die Bedingung dafür, dass A auf der Ebene BCD liegt, mithin die Gleichung der Ebene BCD ist $ABCD = 0$, d. h.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0,$$

wovon die geometrische Bedeutung unmittelbar wahrzunehmen ist.

7. Die Lage des Punkts P in Bezug auf das Tetraëder $OABC$ ist durch die Tetraëderverhältnisse

$$OBCP : OCAP : OABP : OABC = \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : 1$$

bestimmt *). Sind nämlich in Bezug auf drei durch O gehende Axen x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x, y, z die Coordinaten von A, B, C, P, so hat man (4)

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mu_1 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \mu_1 V,$$

u. s. w.

Wenn man diese Gleichungen entwickelt und die Coefficienten von $x_1, y_1, z_1, ..$ in der Determinante V durch $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, ..$ bezeichnet, so findet man

$$\text{(I)} \quad \begin{aligned} \xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z &= \mu_1 V \\ \xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z &= \mu_2 V \\ \xi_3 x + \eta_3 y + \zeta_3 z &= \mu_3 V. \end{aligned}$$

Nun ist (§. 3, 1)

$$\begin{aligned} x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 &= V \\ x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2 + x_3 \eta_3 &= 0 \end{aligned}$$

u. s. w. Folglich

$$\text{(II)} \quad \begin{aligned} x &= \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 \\ y &= \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_2 y_3 \\ z &= \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Verhältnisses $PABC : OABC = \mu$ entwickele man

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x & y & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

*) Lagrange sur les pyr. 28.

d. h. (6 und 4)

$$
\begin{array}{llllllllll}
& PABC & = & OABC & - & OBCP & - & OCAP & - & OABP, \\
\text{(III)} & \mu & = & 1 & - & \mu_1 & - & \mu_2 & - & \mu_3 .
\end{array}
$$

Hieraus folgt, wenn a, b, c, d beliebige Grössen sind,

$$
\begin{aligned}
a + bx + cy + dz = \mu a &+ \mu_1 (a + bx_1 + cy_1 + dz_1) \\
&+ \mu_2 (a + bx_2 + cy_2 + dz_2) \\
&+ \mu_3 (a + bx_3 + cy_3 + dz_3).
\end{aligned}
$$

Um die geometrische Bedeutung dieser Gleichung zu finden, stelle man die Ebene vor, deren Gleichung $a + bx' + cy' + dz' = 0$ ist. Wird diese Ebene von den Parallelen zu z durch P, O, A, B, C in P', O', A', B', C' geschnitten und hat P' die Coordinaten x, y, z', so ist

$$
\begin{aligned}
a + bx + cy + dz' &= 0 \\
a + bx + cy + dz &= d(z - z') = d . P'P,
\end{aligned}
$$

u. s. w. Folglich ist

$$
\text{(IV)} \qquad P'P = \mu . O'O + \mu_1 . A'A + \mu_2 \; B'B + \mu_3 . C'C \; ^{*}),
$$

wobei unter P', O', A', B', C' die Durchschnitte irgend einer Schaar von Parallelen, die man durch P, O, A, B, C gezogen hat, mit einer beliebigen Ebene verstanden werden können. Demnach erscheint P als Schwerpunkt der in O, A, B, C befindlichen Massen μ, μ_1, μ_2, μ_3, deren Summe $= 1$.

8. Sind A_1, B_1, C_1 die Mitten von OA, OB, OC, so wird das Tetraëder $OABC$ von den Ebenen A_1BC, AB_1C, ABC_1 halbirt und der Schwerpunkt P des Tetraëders $OABC$ liegt auf den genannten Halbirungsebenen, so dass

$$
A_1BCP = 0, \quad AB_1CP = 0, \quad ABC_1P = 0.
$$

Weil A_1 die Coordinaten $\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}y_1, \frac{1}{2}z_1$ hat, so ist (6) nach den vorigen Bezeichnungen

$$
\begin{vmatrix}
1 & \frac{1}{2}x_1 & \frac{1}{2}y_1 & \frac{1}{2}z_1 \\
1 & x_2 & y_2 & z_2 \\
1 & x_3 & y_3 & z_3 \\
1 & x & y & z
\end{vmatrix} = 0,
$$

u. s. w. Folglich

$$
\begin{aligned}
2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 &= 1 \\
\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 &= 1 \\
\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 &= 1.
\end{aligned}
$$

Hieraus findet man

$$
\mu_1 - \mu_2 = 0, \; \mu_1 - \mu_3 = 0, \; \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \tfrac{1}{4},
$$

folglich $\mu = \frac{1}{4}$ und

$$
x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4}, \quad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{4},
$$

d. h. der Schwerpunkt des Tetraëders ist die Spitze von 4 gleichen Tetraëdern, deren Basen die Flächen des Tetraëders sind, und der Schwerpunkt von 4 gleichen Massen, welche in den Ecken des Tetraëders ihre Schwerpunkte haben**).

---

*) Feuerbach Untersuchung der dreieckigen Pyramide p. 5. Möbius baryc. Calc. cap. 1. Die Grössen μ, μ_1, μ_2, μ_3 sind die barycentrischen Coordinaten (coordinirten Coefficienten) des Punkts P in Bezug auf die Fundamentalpyramide $OABC$ bei Möbius und Feuerbach.

**) Lagrange sur les pyr. 31—35.

9. Wenn die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks in Bezug auf ein System von zwei Axen gegeben sind, so findet man die Fläche des Dreiecks auf folgende Weise *). Die Coordinaten der Seiten seien $a : b : c$, $a_1 : b_1 : c_1$, $a_2 : b_2 : c_2$, d. h. für jeden Punkt der ersten Seite, dessen Coordinaten p, q sind, hat man $a + bp + cq = 0$ u. s. w. Die Coordinaten der Eckpunkte x, y; x_1, y_1; x_2, y_2 nebst 3 Hülfsgrössen p, p_1, p_2 sind durch die Gleichungen

$$\begin{array}{lll} a + b\,x + c\,y = p & a + b\,x + c\,y_1 = 0 & a + b\,x_2 + c\,y_2 = 0 \\ a_1 + b_1 x + c_1 y = 0 & a_1 + b_1 x_1 + c_1 y_1 = p_1 & a_1 + b_1 x_2 + c_1 y_2 = 0 \\ a_2 + b_2 x + c_2 y = 0 & a_2 + b_2 x_1 + c_2 y_1 = 0 & a_2 + b_2 x_2 + c_2 y_2 = p_2 \end{array}$$

bestimmt, welche ausdrücken, dass der Punkt (x, y) auf der zweiten und dritten, aber nicht auf der ersten Geraden liegt u. s. w. Nach §. 6, 1 ist

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Aus den 3 ersten Gleichungen folgt (§. 9, 3. §. 3, 3)

$$\begin{vmatrix} a-p & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p & b & c \\ 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$R - p\alpha = 0,$$

wenn die Determinante der Liniencoordinaten durch R und der Coefficient von a in derselben durch α bezeichnet wird. Analog hat man

$$R - p_1\,\alpha_1 = 0, \quad R - p_2\,\alpha_2 = 0.$$

Daher ist (§. 2, 7)

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \end{vmatrix} = pp_1p_2 = \frac{R^3}{\alpha\,\alpha_1\,\alpha_2}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{R^2}{\alpha\,\alpha_1\,\alpha_2},$$

mithin (5) die gesuchte doppelte Dreiecksfläche $= \dfrac{R^2 \sin xy}{\alpha\,\alpha_1\,\alpha_2}$.

Nachdem man auf bekannte Weise die Höhen des Dreiecks, d. h. die Abstände der Punkte (x, y), (x_1, y_1), $x_2, y_2)$ von der ersten, zweiten, dritten Geraden berechnet hat, findet man die Seiten des Dreiecks, wenn man die gefundene doppelte Dreiecksfläche durch die Höhen dividirt.

Wenn die Determinante der Liniencoordinaten verschwindet, ohne dass zwei Horizontalreihen aus gleichen Elementen bestehen, so gehen die 3 Geraden durch einen endlich fernen Punkt.

10. Wenn die Gleichungen der Flächen eines Tetraëders in Bezug auf ein System von 3 Axen gegeben sind, so wird das Volum des Tetraëders auf dieselbe Weise gefunden, wie die Dreiecksfläche aus den Seiten **). Die Coordinaten der Flächen seien $a : b : c : d$, $a_1 : b_1 : c_1 : d_1$, $a_2 : b_2 : c_2 : d_2$, $a_3 : b_3 : c_3 : d_3$, d. h. für jeden Punkt der ersten Fläche, dessen Coordinaten p, q, r sind, hat man $a + bp + cq + dr = 0$ u. s. w. Die Coordinaten der Eckpunkte x, y, z; x_1, y_1, z_1;

---

*) Joachimsthal Crelle J. 40 p. 23. **) Joachimsthal l. c.

$x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$ nebst den Hülfsgrössen p, p_1, p_2, p_3 sind durch 4 Systeme von je 4 Gleichungen

$$\begin{aligned} a+b\,x+c\,y+d\,z&=p \\ a_1+b_1x+c_1y+d_1z&=0 \\ a_2+b_2x+c_2y+d_2z&=0 \\ a_3+b_3x+c_3y+d_3z&=0 \end{aligned}$$

u. s. w. bestimmt, welche ausdrücken, dass der Punkt (x, y, z) auf der zweiten, dritten, vierten, aber nicht auf der ersten Ebene liegt, u. s. w. Nach §. 6, 1 ist

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Aus dem ersten System von 4 Gleichungen folgt

$$\begin{vmatrix} a-p & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0, \quad R - p\alpha = 0,$$

wenn R die Determinante der Flächencoordinaten und α d r Coefficient ist, welchen a in R hat. Analog ist

$$R - p_1\alpha_1 = 0, \quad R - p_2\alpha_2 = 0, \quad R - p_3\alpha_3 = 0,$$

folglich

$$p\,p_1p_2p_3 = \frac{R^4}{\alpha\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \frac{R^3}{\alpha\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3},$$

und das gesuchte 6fache Tetraëdervolum (6) $= \frac{R^3 \sin xyz}{\alpha\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3}$. Hieraus lassen sich mit Hülfe der Höhen des Tetraëders seine Flächen berechnen.

Wenn die Determinante der Flächencoordinaten verschwindet, ohne dass zwei Horizontalreihen ihrer Elemente identisch sind, so gehen die 4 Ebenen durch einen endlich fernen Punkt.

§. 17. Producte von Dreiecksflächen und Tetraëdervolumen.

1. Wenn x, y, r, r_1 beliebige Richtungen einer Ebene sind und die positiven Winkel derselben durch Drehungen von einerlei Sinn beschrieben werden, so ist

$$\sin xy \sin rr_1 = \begin{vmatrix} \cos xr & \cos yr \\ \cos xr_1 & \cos yr_1 \end{vmatrix}.$$

Beweis. Ohne die Winkel zu verändern, kann man die gegebenen Richtungen durch einen Punkt O legen. Schneidet man auf den Richtungen r, r_1 die positiven Strecken $OA = r$, $OB = r_1$ ab und sind $x, y; x_1; y_1$ die Coordinaten der Punkte A, Bin Bezug auf die Axen x, y, so ist (§. 16, 1)

$$r r_1 \sin xy \sin r r_1 = \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos xy \\ \cos xy & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} x + y \cos xy & x \cos xy + y \\ x_1 + y_1 \cos xy & x_1 \cos xy + y_1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} r \cos xr & r \cos yr \\ r_1 \cos xr_1 & r_1 \cos yr_1 \end{vmatrix},$$

woraus nach §. 3, 2 die Behauptung folgt.

2. Wenn die Dreiecke AA_1A_2 und BB_1B_2 auf einer Ebene liegen und
$$AA_i . BB_k . \cos AA_i{}^\wedge BB_k = c_{i,k}$$
gesetzt wird, so ist
$$4\, AA_1A_2 . BB_1B_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

Beweis. Setzt man $AA_1 = x$, $AA_2 = y$, $BB_1 = r$, $BB_2 = r_1$, so erhält man (1)
$$4\, AA_1A_2 . BB_1B_2 = xyrr_1 \sin xy \sin rr_1$$
$$= \begin{vmatrix} xr \cos xr & yr \cos yr \\ xr_1 \cos xr_1 & yr_1 \cos yr_1 \end{vmatrix}.$$

Das Product $c_{i,k}$ ist nicht zweideutig, wie es scheinen könnte. Man bestimme nach Willkür die positiven Richtungen der Geraden AA_i und BB_k, d. h. die Richtungen der auf diesen Geraden positiv zu bezeichnenden Strecken. Dadurch erhalten die Factoren $\cos AA_i{}^\wedge BB_k$, AA_i, BB_k bestimmte Zeichen. Hätte man die positive Richtung einer Geraden z. B. AA_i entgegengesetzt angenommen, so würde der Winkel $AA_i{}^\wedge BB_k$ um 180^0 verschieden ausfallen, also $\cos AA_i{}^\wedge BB_k$ verschiedenes Zeichen erhalten, während zugleich die Strecke AA_i das Zeichen wechselt.

3. Wenn die Ebenen der Dreiecke AA_1A_2 und BB_1B_2 den Winkel φ bilden, so ist nach der angenommenen Bezeichnung
$$4\, AA_1A_2 . BB_1B_2 . \cos \varphi = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

Beweis. Ist NN_1N_2 die orthogonale Projection von BB_1B_2 auf die Ebene AA_1A_2, so lässt sich auf das Product $4\, AA_1A_2 . NN_1N_2$ der vorige Lehrsatz anwenden. Dabei ist auf der einen Seite $NN_1N_2 = BB_1B_2 . \cos \varphi$, auf der andern Seite
$$AA_1 . NN_1 . \cos AA_1{}^\wedge NN_1 = AA_1 . BB_1 . \cos AA_1{}^\wedge BB_1$$
u. s. w., weil die orthogonalen Projectionen von NN_1 und BB_1 auf die Gerade AA_1 von einander nicht verschieden sind.

Das Product $4\, AA_1A_2 . BB_1B_2 . \cos \varphi$ ist eben so wenig zweideutig, als die dafür gefundene Determinante. Nach beliebiger Annahme des positiven Sinnes in jeder von beiden Ebenen, d. h. des Sinnes der positiv zu bezeichnenden Winkel und Flächen, hat man die Zeichen der Dreiecke AA_1A_2 und BB_1B_2 zu ermitteln und dann unter φ den Winkel zu verstehen, welchen die eine Ebene beschreiben muss, damit die positiven Dreiecke beider Ebenen einerlei Sinnes werden. Wenn man den positiven Sinn in einer Ebene ändert, so erleiden zwei Factoren des obigen Products Zeichenwechsel, nämlich ein Dreieck und $\cos \varphi$, weil φ sich um 180^0 ändert; also bleibt das Product unverändert.

4. Wenn x, y, r, r_1 beliebige Richtungen des Raumes sind, so ist

$$\sin xy \sin rr_1 \cos xy^\wedge rr_1 = \begin{vmatrix} \cos xr & \cos yr \\ \cos xr_1 & \cos yr_1 \end{vmatrix} \text{*)}.$$

Beweis. Legt man die gegebenen Richtungen durch einen Punkt O und schneidet auf ihnen die positiven Strecken $OC = x$, $OD = y$, $OE = r$, $OF = r_1$ ab, so erhält man (3)

$$xy\,rr_1 \sin xy \sin rr_1 \cos xy^\wedge rr_1 = \begin{vmatrix} xr \cos xr & yr \cos yr \\ xr_1 \cos xr_1 & yr_1 \cos yr_1 \end{vmatrix},$$

woraus nach Weglassung der gemeinschaftlichen Factoren $xyrr_1$ die Behauptung folgt.

Anmerkung. Um die Gültigkeit desselben Satzes für 4 beliebige Ebenen nachzuweisen **), hat man den gefundenen Satz auf die positiven Normalen derselben anzuwenden, oder was dasselbe ist, auf die Polarfigur des vorhin erwähnten Vierecks $CDEF$, wenn die Punkte C, D, E, F auf einer um das Centrum O beschriebenen Kugel liegend vorgestellt werden. Diese Kugel wird von dem in willkürlich bestimmter Richtung genommenen Durchschnitt der Ebenen in einem Punkte, von jeder Ebene in einem Hauptkreise von willkürlich bestimmtem Sinne geschnitten, ohne dass das Product, dessen Werth durch die Determinante angegeben wird, einer Zweideutigkeit ausgesetzt ist.

5. Aus den Gleichungen

$$\sin rs \sin tu \cos rs^\wedge tu = \cos rt \cos su - \cos st \cos ru$$
$$\sin st \sin ru \cos st^\wedge ru = \cos sr \cos tu - \cos tr \cos su$$
$$\sin tr \sin su \cos tr^\wedge su = \cos ts \cos ru - \cos rs \cos tu$$

folgt durch Addition

(I) $\sin rs \sin tu \cos rs^\wedge tu + \sin st \sin ru \cos st^\wedge ru + \sin tr \sin su \cos tr^\wedge su = 0,$

weil $\cos tr = \cos rt$ u. s. w. Bei dieser Gleichung ist zu beachten, dass $\sin rs = -\sin sr$, $\cos rs^\wedge tu = -\cos sr^\wedge tu$ u. s. w.

Die entsprechende Gleichung ***) zwischen den Winkeln von 4 Ebenen und den gegenüberliegenden Durchschnitten derselben lautet

(II) $\sin rs \sin tu \cos \gamma\gamma_1 + \sin st \sin ru \cos \alpha\alpha_1 + \sin tr \sin su \cos \beta\beta_1 = 0,$

wenn die Durchschnitte rs, st, tr durch γ, α, β und die Durchschnitte tu, ru, su durch $\gamma_1, \alpha_1, \beta_1$ bezeichnet werden.

Ebenso hat man für 4 Punkte A, B, C, D

(III) $AB.CD.\cos \gamma\gamma_1 + BC.AD.\cos \alpha\alpha_1 + CA.BD.\cos \beta\beta_1 = 0$ †),

wenn AB, BC, CA Strecken auf den Geraden γ, α, β und CD, AD, BD Strecken auf den Geraden $\gamma_1, \alpha_1, \beta_1$ bedeuten. Es ist nämlich

*) Dieser Satz, welcher die vorigen von v. Staudt gefundenen Sätze in sich schliesst, ist zuerst von Gauss disqu. gen. circa superf. II, 6 aufgestellt, dann von v. Staudt Crelle J. 24 p. 252, zuletzt von Cauchy Exerc. d'Anal. 4 p. 44 reproducirt worden.

**) Einen analytischen Beweis dieses polaren Zusatzes hat Joachimsthal l. c. p. 44 gegeben.

***) Joachimsthal l. c. †) Carnot mém. sur la relation qui existe etc. 27.

$$AB \cos \gamma\gamma_1 = AD \cos \alpha_1\gamma_1 + DB \cos \beta_1\gamma_1$$
$$BC \cos \alpha\alpha_1 = BD \cos \beta_1\alpha_1 + DC \cos \gamma_1\alpha_1$$
$$CA \cos \beta\beta_1 = CD \cos \gamma_1\beta_1 + DA \cos \alpha_1\beta_1 .$$

Indem man diese Gleichungen der Reihe nach mit CD, AD, BD multiplicirt und summirt, erhält man die angegebene Relation, weil $AD = -DA$, $\cos \beta_1\alpha_1 = \cos \alpha_1\beta_1$ u. s. w.

Die Gleichungen (II) und (III) sind von einander nicht wesentlich verschieden, wie JOACHIMSTHAL l. c. bemerkt hat. Man hat nämlich auch dem Zeichen nach

$$ABCD = \tfrac{2}{3} ABC . ABD \frac{\sin ABC^\wedge ABD}{AB},$$

weil $\frac{2ABD}{AB}$ die Höhe des Dreiecks ABD in Bezug auf die Basis AB, folglich $\frac{2ABD}{AB} \times \sin ABC^\wedge ABD$ die Höhe der Pyramide $ABCD$ in Bezug auf die Basis ABC bedeutet, unter der Voraussetzung, dass für einen Betrachter, dessen Richtung von oben nach unten AB ist, der Winkel $ABC^\wedge ABD$ und der von AB, AC, AD gebildete Raumwinkel einerlei Sinnes sind. Ebenso ist

$$CDAB = \tfrac{2}{3}\, CDA . CDB \frac{\sin CDA^\wedge CDB}{CD},$$

folglich durch Multiplication

$$ABCD^2 = \tfrac{4}{9} P \frac{\sin rs \sin tu}{AB . CD},$$

wenn die Ebenen, welche A, B, C, D gegenüberliegen, durch r, s, t, u bezeichnet werden und P das Product der Dreiecksflächen bedeutet. Dabei wird der positive Sinn jeder Ebene so bestimmt, dass das auf der Ebene liegende Dreieck positiv sei; positive Flächenwinkel werden durch Drehungen von einerlei Sinn beschrieben. Durch cyclische Vertauschung von A, B, C erleidet P keine Veränderung, also ist auch

$$ABCD^2 = \tfrac{4}{9} P \frac{\sin st \sin ru}{BC . AD} = \tfrac{4}{9} P \frac{\sin tr \sin su}{CA . BD},$$

mithin

$$\text{(IV)} \qquad \frac{9 ABCD^2}{4P} = \frac{\sin rs \sin tu}{AB . CD} = \frac{\sin st \sin ru}{BC . AD} = \frac{\sin tr \sin su}{CA . BD} \; *).$$

Hieraus erhellt, wie von den Gleichungen (II) und (III) eine aus der andern abgeleitet werden kann.

6. Wenn x, y, z, r, r_1, r_2 beliebige Richtungen im Raume sind, so ist

$$\sin xyz \sin r r_1 r_2 = \begin{vmatrix} \cos xr & \cos yr & \cos zr \\ \cos xr_1 & \cos yr_1 & \cos zr_1 \\ \cos xr_2 & \cos yr_2 & \cos zr_2 \end{vmatrix} \; **).$$

Beweis. Legt man die gegebenen Richtungen durch einen Punkt O und schneidet auf denselben die positiven Strecken $OA = r$, $OB = r_1$, $OC = r_2$ ab und sind x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 die Coordinaten der Punkte A, B, C in Bezug auf die Axen x, y, z, so ist (§. 16, 4)

*) BRETSCHNEIDER Geometrie §. 677.

**) v. STAUDT l. c. Der besondere Fall, in welchem das System x, y, z orthogonal, also $\sin xyz = \pm 1$ ist, kommt früher bei GAUSS l. c. vor.

$$r r_1 r_2 \sin xyz \sin r r_1 r_2 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x + y \cos xy + z \cos xz & x \cos xy + y + z \cos yz & x \cos xz + y \cos yz + z \\ x_1 + y_1 \cos xy + z_1 \cos xz & x_1 \cos xy + y_1 + z_1 \cos yz & x_1 \cos xz + y_1 \cos yz + z_1 \\ x_2 + y_2 \cos xy + z_2 \cos xz & x_2 \cos xy + y_2 + z_2 \cos yz & x_2 \cos xz + y_2 \cos yz + z_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} r \cos xr & r \cos yr & r \cos zr \\ r_1 \cos xr_1 & r_1 \cos yr_1 & r_1 \cos zr_1 \\ r_2 \cos xr_2 & r_2 \cos yr_2 & r_2 \cos zr_2 \end{vmatrix},$$

woraus durch Weglassung der gemeinschaftlichen Factoren $r r_1 r_2$ die Behauptung folgt.

7. Wenn $c_{i,k}$ das oben (2) angegebene Streckenproduct bedeutet, so ist

$$36\, A A_1 A_2 A_3 . B B_1 B_2 B_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix} \text{*)}.$$

Beweis. Setzt man

$$A A_1 = x, \; A A_2 = y, \; A A_3 = z,$$
$$B B_1 = r, \; B B_2 = r_1, \; B B_3 = r_2,$$

so erhält man (6)

$$36\, A A_1 A_2 A_3 . B B_1 B_2 B_3 = xyz\, r r_1 r_2 \sin xyz \sin r r_1 r_2$$

$$= \begin{vmatrix} xr \cos xr & yr \cos yr & zr \cos zr \\ xr_1 \cos xr_1 & yr_1 \cos yr_1 & zr_1 \cos zr_1 \\ xr_2 \cos xr_2 & yr_2 \cos yr_2 & zr_2 \cos zr_2 \end{vmatrix}.$$

8. Die Determinanten

$$\begin{vmatrix} \cos xr & \cos yr \\ \cos xr_1 & \cos yr_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cos xr & \cos yr & \cos zr \\ \cos xr_1 & \cos yr_1 & \cos zr_1 \\ \cos xr_2 & \cos yr_2 & \cos zr_2 \end{vmatrix}$$

haben zufolge der in (1, 4, 6) dafür gefundenen Werthe die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sie unverändert bleiben, wenn die gegenseitige Lage einerseits der Winkel xy, rr_1, andererseits der Raumwinkel xyz, $r r_1 r_2$ beliebig verändert wird, sobald im ersten Falle der Flächenwinkel $xy^\wedge rr_1$ seine Grösse behält **).

9. Mit Hülfe der Gleichung (6) lässt sich der Abstand von zwei Geraden im Raume, deren Lage in Bezug auf ein beliebiges System x, y, z gegeben ist, berechnen. Sind x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 die Coordinaten der Punkte A, B; sind die Richtungen r_1, r_2 der Geraden AA', BB' durch ihre Winkel mit den Axen gegeben, so dass der Winkel $r_1 r_2$ berechnet werden kann; ist r die Strecke AB, deren Coordinaten $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ sind, und d der gesuchte Abstand der Geraden AA', BB'; zieht man endlich AC in der Richtung r_2 und versteht unter AA', AC Längeneinheiten, so ist

$$6\, AA'CB = d \sin r_1 r_2 = r \sin r r_1 r_2,$$

*) v. Staudt l. c. In dem Falle, dass das zweite Tetraëder vom ersten nicht verschieden, also $c_{i,k} = c_{k,i}$ ist, erhält man die Formel Lagrange's (sur les pyr. 15) und Legendre's (Elém. de géom. Note V, 7).

**) Cauchy Exerc. d'anal. 4 p. 51.

folglich
$$d \sin xyz \sin r_1 r_2 = \begin{vmatrix} r\cos xr & r\cos yr & r\cos zr \\ \cos xr_1 & \cos yr_1 & \cos zr_1 \\ \cos xr_2 & \cos yr_2 & \cos zr_2 \end{vmatrix},$$
worin
$$\begin{aligned} r\cos xr &= (x_2-x_1) + (y_2-y_1)\cos xy + (z_2-z_1)\cos xz \\ r\cos yr &= (x_2-x_1)\cos xy + (y_2-y_1) + (z_2-z_1)\cos yz \\ r\cos zr &= (x_2=x_1)\cos xz + (y_2-y_1)\cos yz + (z_2-z_1). \end{aligned}$$
Die Entwickelung giebt *)
$$\begin{aligned} d \sin xyz \sin r_1 r_2 = & (\alpha + \beta\cos xy + \gamma\cos xz)(x_2-x_1) \\ & + (\alpha\cos xy + \beta + \gamma\cos yz)(y_2-y_1) \\ & + (\alpha\cos xz + \beta\cos yz + \gamma)(z_2-z_1), \end{aligned}$$
wenn zur Abkürzung
$$\alpha = \begin{vmatrix} \cos yr_1 & \cos zr_1 \\ \cos yr_2 & \cos zr_2 \end{vmatrix},\quad \beta = \begin{vmatrix} \cos zr_1 & \cos zr_2 \\ \cos xr_1 & \cos xr_2 \end{vmatrix},\quad \gamma = \begin{vmatrix} \cos xr_1 & \cos yr_1 \\ \cos xr_2 & \cos yr_2 \end{vmatrix}$$
gesetzt wird.

10. Für 3 Richtungen einer Ebene a, b, c hat man
$$(\sin ab + \sin bc + \sin ca)^2 = 8 \begin{vmatrix} 0 & \sin^2\frac{ab}{2} & \sin^2\frac{ac}{2} \\ \sin^2\frac{ab}{2} & 0 & \sin^2\frac{bc}{2} \\ \sin^2\frac{ac}{2} & \sin^2\frac{bc}{2} & 0 \end{vmatrix},$$
und für 4 Richtungen des Raumes (oder Ebenen) a, b, c, d
$$(\sin abd + \sin bcd + \sin cad - \sin abc)^2 = -16 \begin{vmatrix} 0 & \sin^2\frac{ab}{2} & \sin^2\frac{ac}{2} & \sin^2\frac{ad}{2} \\ \sin^2\frac{ab}{2} & 0 & \sin^2\frac{bc}{2} & \sin^2\frac{bd}{2} \\ \sin^2\frac{ac}{2} & \sin^2\frac{bc}{2} & 0 & \sin^2\frac{cd}{2} \\ \sin^2\frac{ad}{2} & \sin^2\frac{bd}{2} & \sin^2\frac{cd}{2} & 0 \end{vmatrix},$$
welche Determinanten nach §. 5, 2 entwickelt werden können **).

Beweis. Indem man die Axen x, y zu Hülfe nimmt, bei welchen $\sin xy = 1$ ist, erhält man (1)
$$\sin bc = \begin{vmatrix} \cos xb & \cos yb \\ \cos xc & \cos yc \end{vmatrix} \text{ u. s. w.,}$$
folglich (§. 3, 1)
$$\sin ab + \sin bc + \sin ca = \begin{vmatrix} 1 & \cos xa & \cos ya \\ 1 & \cos xb & \cos yb \\ 1 & \cos xc & \cos yc \end{vmatrix},$$
$$\begin{aligned} -(\sin ab + \sin bc + \sin ca)^2 &= \begin{vmatrix} 1 & \cos xa & \cos ya \\ 1 & \cos xb & \cos yb \\ 1 & \cos xc & \cos yc \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & \cos xa & \cos ya \\ -1 & \cos xb & \cos yb \\ -1 & \cos xc & \cos yc \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

*) Cauchy leçons sur les appl. du calc. inf. Prélim. (102).

**) Der plan-trigonometrische Satz ist in den Lehrbüchern anzutreffen. Der entsprechende polyedrometrische Satz ist von Joachimsthal l. c. (47) ohne genauere Angabe der Zeichen aufgestellt und bewiesen worden.

wobei (§. 6, 4)

$$h_{11} = -1 + \cos^2 xa \qquad + \cos^2 ya \qquad = 0$$
$$h_{12} = -1 + \cos xa \cos xb + \cos ya \cos yb = -1 + \cos ab = -2 \sin^2 \frac{ab}{2}$$

u. s. w. Nach Ausziehung des Factor $(-2)^3$ aus der Determinante der Elemente $h_{11} \ldots h_{33}$ (§. 3, 2) erhält man die angegebene Gleichung.

Indem man ferner die Axen x, y, z gebraucht, bei welchen $\sin xyz = 1$ ist, erhält man (6)

$$\sin abc = \begin{vmatrix} \cos xa & \cos ya & \cos za \\ \cos xb & \cos yb & \cos zb \\ \cos xc & \cos yc & \cos zc \end{vmatrix}, \text{ u. s. w.}$$

folglich

$$\sin abd + \sin bcd + \sin cad - \sin abc = \begin{vmatrix} 1 & \cos xa & \cos ya & \cos za \\ 1 & \cos xb & \cos yb & \cos zb \\ 1 & \cos xc & \cos yc & \cos zc \\ 1 & \cos xd & \cos yd & \cos zd \end{vmatrix}$$

und durch ein dem vorigen analoges Verfahren

$$-(\sin abd + \sin bcd + \sin acd - \sin abc)^2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{vmatrix},$$

worin

$$h_{11} = -1 + \cos^2 xa \qquad + \cos^2 ya \qquad + \cos^2 za \qquad = 0$$
$$h_{12} = -1 + \cos xa \cos xb + \cos ya \cos yb + \cos za \cos zb$$
$$= -1 + \cos ab = -2 \sin^2 \frac{ab}{2}$$

u. s. w. Wenn man aus dieser Determinante den Factor $(-2)^4$ zieht, so erhält man die angegebene Gleichung.

11. Wenn durch a, b, c die Richtungen der Radien OA, OB, OC eines Kreises, durch f, g, h die Quadrate der Seiten BC, CA, AB des eingeschriebenen Dreiecks ABC, durch r der Radius bezeichnet werden; wenn man beide Seiten der ersten in (10) aufgestellten goniometrischen Gleichungen mit $8r^6$ multiplicirt und bemerkt, dass

$$r^2 \sin ab = 2\,OAB, \quad 4r^2 \sin^2 \frac{ab}{2} = h \text{ u. s. w.},$$

so erhält man

$$(4r \, . \, ABC)^2 = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & h & g \\ h & 0 & f \\ g & f & 0 \end{vmatrix} = fgh,$$

wie bekannt.

Wenn durch a, b, c, d die Richtungen der Radien OA, OB, OC, OD einer Kugel, durch f, g, h die Quadrate der Kanten BC, CA, AB durch f', g', h' die Quadrate der gegenüberliegenden Kanten AD, BD, CD des eingeschriebenen Tetraëders $ABCD$, durch r der Radius bezeichnet werden; wenn man beide Seiten der zweiten in (10) aufgestellten Gleichung mit $16r^8$ multiplicirt und erwägt, dass

$$r^3 \sin abd = 6\,OABD, \quad 4r^2 \sin^2 \frac{ab}{2} = h \text{ u. s. w.},$$

so erhält man

$$(24 r . ABCD)^2 = -\begin{vmatrix} 0 & h & g & f' \\ h & 0 & f & g' \\ g & f & 0 & h' \\ f' & g' & h' & 0 \end{vmatrix}$$

zur Berechnung des Radius der dem Tetraëder umgeschriebenen Kugel aus den Kanten und dem Volum *).

12. Das öfter gebrauchte Product von zwei Strecken mit dem Cosinus des von ihnen gebildeten Winkels lässt sich durch Quadrate der die Endpunkte der Strecken verbindenden Geraden ausdrücken, wodurch die Producte von Polygonen und Polyedern bemerkenswerthe Formen erhalten.

Nach den in (5, III) festgesetzten Bezeichnungen ist

$$2 AB . CD \cos \gamma\gamma_1 = 2 AD . CD \cos \alpha_1 \gamma_1 - 2 BD . CD \cos \beta_1 \gamma_1$$

Nun hat man allgemein

$$2 AD . CD \cos \alpha_1 \gamma_1 = AD^2 + CD^2 - AC^2$$
$$2 BC . CD \cos \beta_1 \gamma_1 = BD^2 + CD^2 - BC^2,$$

folglich

$$2 AB . CD \cos \gamma\gamma_1 = AD^2 - BD^2 - (AC^2 - BC^2) \text{ **)}.$$

13. Bezeichnet $d_{i,k}$ das Quadrat der Strecke $A_i B_k$, so ist für zwei Dreiecke, deren Ebenen den Winkel φ bilden,

$$16 A_1 A_2 A_3 . B_1 B_2 B_3 . \cos \varphi = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ 1 & d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{vmatrix} \text{ ***)},$$

worin sich die ersten Suffixe auf das erste Dreieck, die zweiten Suffixe auf das zweite Dreieck beziehen.

Beweis. Nach (3) ist in der dort angegebenen Bezeichnung

$$16 A_1 A_2 A_3 . B_1 B_2 B_3 . \cos \varphi = \begin{vmatrix} 2c_{22} & 2c_{32} \\ 2c_{23} & 2c_{33} \end{vmatrix}.$$

Nun ist (12)

$$2 c_{i,k} = d_{1,k} - d_{i,k} - (d_{11} - d_{i,1}).$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} d_{12} - d_{22} - (d_{11} - d_{21}) & d_{12} - d_{32} - (d_{11} - d_{31}) \\ d_{13} - d_{23} - (d_{11} - d_{21}) & d_{13} - d_{33} - (d_{11} - d_{31}) \end{vmatrix}$$

lässt sich nach §. 2, 6 und §. 3, 4 transformiren in

$$\begin{vmatrix} 1 & d_{11} - d_{21} - (d_{11} - d_{21}) & d_{11} - d_{31} - (d_{11} - d_{31}) \\ 1 & d_{12} - d_{22} - (d_{11} - d_{21}) & d_{12} - d_{32} - (d_{11} - d_{31}) \\ 1 & d_{13} - d_{23} - (d_{11} - d_{21}) & d_{13} - d_{33} - (d_{11} - d_{31}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & d_{11} - d_{21} & d_{11} - d_{31} \\ 1 & d_{12} - d_{22} & d_{12} - d_{32} \\ 1 & d_{13} - d_{23} & d_{13} - d_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ d_{11} & 1 & d_{11} - d_{21} & d_{11} - d_{31} \\ d_{12} & 1 & d_{12} - d_{22} & d_{12} - d_{32} \\ d_{13} & 1 & d_{13} - d_{23} & d_{13} - d_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ 1 & d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{vmatrix}.$$

---

*) In diese Form ist die von CRELLE (math. Aufsätze I p. 117) gefundene Relation durch JOACHIMSTHAL l. c. (27) gebracht worden.

) CARNOT l. c. *) Diese Form hat der Satz, welchen v. STAUDT l. c. zuerst aufgestellt hat, nach CAYLEY's Vorgange durch SYLVESTER (Philos. Mag. 1852, II p. 335) erhalten. Vergl. unten §. 18, 9 u. 12.

Zusatz 1. Wenn die Punkte B_1, B_2, B_3 der Reihe nach mit den Punkten A_1, A_2, A_3 zusammenfallen, so wird $\cos\varphi = 1$, $d_{i,k} = d_{k,i}$, $d_{i,i} = 0$, folglich

$$16\, A_1 A_2 A_3^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix}$$

übereinstimmend mit dem bekannten Ausdruck der Dreiecksfläche durch die Seiten (vergl. §. 5, 2).

Die Bedingung, dass A_1, A_2, A_3 auf einer Geraden liegen, lautet

$$= 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix}.$$

Bei jeder Lage eines Punktes auf der Geraden durch die beiden andern Punkte verschwindet je ein Factor der Determinante.

Zusatz 2. Da die Fläche des ebenen Vierecks

$$A_1 A_2 A_3 A_4 = A_1 A_2 A_3 + A_1 A_3 A_4$$

ist, so hat man für zwei ebene Vierecke, deren Ebenen den Winkel φ einschliessen,

$$16\, A_1 A_2 A_3 A_4 . B_1 B_2 B_3 B_4 . \cos\varphi$$

$$= 16 A_1 A_2 A_3 . B_1 B_2 B_3 . \cos\varphi + 16 A_1 A_2 A_3 . B_1 B_3 B_4 \cos\varphi$$
$$+ 16 A_1 A_3 A_4 . B_1 B_2 B_3 \cos\varphi + 16 A_1 A_3 A_4 . B_1 B_3 B_4 . \cos\varphi$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ 1 & d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{31} & d_{41} \\ 1 & d_{12} & d_{32} & d_{42} \\ 1 & d_{13} & d_{33} & d_{43} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{31} & d_{41} \\ 1 & d_{13} & d_{33} & d_{43} \\ 1 & d_{14} & d_{34} & d_{44} \end{vmatrix}$$

Sind demnach A und B die Flächen ebener Polygone von m und n Seiten, deren Ebenen den Winkel φ bilden, so ist $AB\cos\varphi$ die negative Summe von $(m-2)(n-2)$ Determinanten vierten Grades von der angegebenen Art, also eine ganze rationale Function von den Quadraten der Geraden, welche die Eckpunkte des einen Polygons mit denen des andern verbinden *).

14. Wenn $d_{i,k}$ das Quadrat der Strecke $A_i B_k$ bedeutet, so ist für zwei Tetraëder

$$288\, A_1 A_2 A_3 A_4 . B_1 B_2 B_3 B_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} & d_{41} \\ 1 & d_{12} & d_{22} & d_{32} & d_{42} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} & d_{43} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & d_{44} \end{vmatrix},$$

worin die ersten Suffixe auf das erste Tetraëder, die zweiten Suffixe auf das zweite Tetraëder sich beziehen.

Beweis. Das gesuchte Product ist nach (7) die Determinante

$$\begin{vmatrix} d_{12}-d_{22}-(d_{11}-d_{21}) & d_{12}-d_{32}-(d_{11}-d_{31}) & d_{12}-d_{42}-(d_{11}-d_{41}) \\ d_{13}-d_{23}-(d_{11}-d_{21}) & d_{13}-d_{33}-(d_{11}-d_{31}) & d_{13}-d_{43}-(d_{11}-d_{41}) \\ d_{14}-d_{24}-(d_{11}-d_{21}) & d_{14}-d_{34}-(d_{11}-d_{31}) & d_{14}-d_{44}-(d_{11}-d_{41}) \end{vmatrix},$$

*) v. Staudt l. c.

welche sich auf die (13) angegebene Weise in

$$\begin{vmatrix} 1 & d_{11}-d_{21} & d_{11}-d_{31} & d_{11}-d_{41} \\ 1 & d_{12}-d_{22} & d_{12}-d_{32} & d_{12}-d_{42} \\ 1 & d_{13}-d_{23} & d_{13}-d_{33} & d_{13}-d_{43} \\ 1 & d_{14}-d_{24} & d_{14}-d_{34} & d_{14}-d_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} & d_{41} \\ 1 & d_{12} & d_{22} & d_{32} & d_{42} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} & d_{43} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & d_{44} \end{vmatrix}$$

transformiren lässt.

Zusatz 1. Wenn die Punkte B_1, B_2, B_3, B_4 der Reihe nach mit A_1, A_2, A_3, A_4 zusammenfallen, so wird $d_{i,k} = d_{k,i}$, $d_{i,i} = 0$, folglich

$$288\, A_1 A_2 A_3 A_4^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix}.$$

Wenn man diese Determinante nach §. 5, 2 entwickelt, so erhält man die bekannte von Euler (Nov. Comm. Petrop. 4 p. 158) zur Berechnung des Tetraëdervolums aus den Kanten aufgestellte Formel.

Die Bedingung, unter welcher die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 auf einer Ebene liegen, lautet

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix}$$

übereinstimmend mit der Gleichung zwischen den Strecken, welche 4 Punkte einer Ebene verbinden (Euler Acta Petrop. 6, I p. 3).

Zusatz 2. Ein Polyeder lässt sich durch Gerade, welche einen Eckpunkt A_1 mit den übrigen Eckpunkten $A_2 A_3 A_4$.. verbinden, und durch die Ebenen, auf denen die erforderlichen Paare dieser Geraden liegen, in ein Aggregat von dreiseitigen Pyramiden zerlegen, deren gemeinschaftliche Spitze A_1 ist und deren Basen Theile der Polyederfläche sind. Die Ternionen der Eckpunkte, wodurch die Basen dieser Pyramiden bestimmt sind, bringe man in solche Ordnung, dass alle Theile der Polyederfläche von aussen betrachtet desselben Sinnes sind; dann sind die Pyramiden des Aggregats mit denselben oder entgegengesetzten Zeichen zu versehen, je nachdem ihre Basen von der Spitze A_1 aus betrachtet einerlei Sinnes sind oder nicht.

Das Product aus zwei Polyedern lässt sich demnach als Aggregat von Producten aus jedesmal zwei Tetraëdern betrachten und als Aggregat von Determinanten fünften Grades von der angegebenen Art darstellen. Das Product aus zwei Polyedern ist also eine ganze rationale Function von den Quadraten der Strecken, welche die Eckpunkte des einen Polyeders mit denen des andern verbinden, wie v. Staudt bemerkt hat.

15. Wenn die eine Tetraëderecke einschliessenden Flächen

$$OBC = f,\ OCA = f_1,\ OAB = f_2$$

sind und $\sin_{012}$ den Sinus der Ecke bedeutet, welche der Tetraëderecke polar zugeordnet ist, so dass die Kanten der erstern von den Flächen der letztern normal auswärts sich erstrecken, so ist

$$OABC^2 = \tfrac{4}{9} f f_1 f_2 \sin_{012} \text{*)}.$$

Beweis. Bezeichnet man OA, OB, OC durch r, r_1, r_2 und $r r_1 \cos r r_1$ durch $a_{01} = a_{10}$ u. s. f., so ist (§. 16, 4. 17, 7)

$$(6\,OABC)^2 = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet man ferner durch α_{00} den Coefficienten von a_{00} in dieser Determinante u. s. f., so ist (§. 7, 1)

$$(6\,OABC)^4 = \begin{vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

Nun ist aber (3)

$$\alpha_{00} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 4 f^2,$$

$$\alpha_{01} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{10} \\ a_{22} & a_{20} \end{vmatrix} = 4 f f_1 \cos_{01},$$

u. s. w., wobei $\cos_{01}$ den Cosinus des Winkels bedeutet, welchen die von den Flächen OBC und OCA auswärts gerichteten Normalen bilden. Daher ist

$$(6\,OABC)^4 = 4^3 f^2 f_1^2 f_2^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos_{01} & \cos_{02} \\ \cos_{01} & 1 & \cos_{12} \\ \cos_{02} & \cos_{12} & 1 \end{vmatrix},$$

woraus nach §. 16, 2 die Behauptung folgt.

Anmerkung. Auf gleiche Weise lässt sich aus §. 17, 7 die Gleichung

$$(36\,AA_1A_2A_3 \,.\, BB_1B_2B_3)^2 = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \gamma_{31} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{32} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} \end{vmatrix}$$

ableiten, wo $\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots$ die Coefficienten von $c_{11}, c_{21}, \ldots$ in der Determinante der Elemente $c_{11} \ldots c_{33}$ sind und Flächenproducte von der in (3) betrachteten Art bedeuten.

16. Lagrange (sur les pyr. 12) hat bemerkt, dass für die vierte Tetraëderfläche ABC nach den in (15) angenommenen Bezeichnungen die Gleichung

$$4\,ABC^2 = \alpha_{00} + \alpha_{11} + \alpha_{22} + 2\alpha_{01} + 2\alpha_{12} + 2\alpha_{20}$$

besteht, oder

$$ABC^2 = f^2 + f_1^2 + f_2^2 + 2 f f_1 \cos_{01} + 2 f_1 f_2 \cos_{12} + 2 f_2 f \cos_{20}.$$

Diese Gleichung ergiebt sich am einfachsten, indem man sie als polares Correlat der tetragonometrischen Gleichung (vergl. §. 16, 4 und §. 18, 2 Zusatz)

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy \cos xy + 2yz \cos yz + 2zx \cos zx$$

betrachtet.

---

*) Bretschneider Geometrie 677. Diese Gleichung ist im Wesentlichen von Lagrange's Gleichung (sur les pyr. 17) nicht verschieden und wird hier auf ähnliche Art wie bei Lagrange bewiesen.

Mit Hülfe der Formeln für $(2ABC)^2$ und $(6OABC)^4$ hat LAGRANGE (sur les pyr. 17) die Lösung der Aufgabe unternommen, die Tetraëder vom grössten oder kleinsten Volum zu bestimmen, deren Flächen gegebene Inhalte f, f_1, f_2, f_3 haben. Da

$$\alpha_{00}=4f^2,\ \alpha_{11}=4f_1^2,\ \alpha_{22}=4f_2^2,$$
$$\alpha_{00}+\alpha_{11}+\alpha_{22}+2\alpha_{01}+2\alpha_{12}+2\alpha_{20}=4f_3^2,$$

so ist die vierte Potenz des 6fachen Tetraëdervolums (15)

$$u=\begin{vmatrix}\alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02}\\ \alpha_{01} & \alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{02} & \alpha_{12} & \alpha_{22}\end{vmatrix}$$

eine Function der Variablen $\alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{12}$, deren Summe v einen gegebenen Werth hat. Die Bedingungen, unter welchen u einen grössten oder kleinsten Werth erreicht, sind bekanntlich

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha_{01}}+\mu\frac{\partial v}{\partial \alpha_{01}}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial \alpha_{02}}+\mu\frac{\partial v}{\partial \alpha_{02}}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial \alpha_{12}}+\mu\frac{\partial v}{\partial \alpha_{12}}=0,$$

worin μ eine neue Variable bedeutet, welche aus diesen Gleichungen zu eliminiren ist. Nun ist $\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \alpha_{01}}$ der Coefficient von α_{01} in u (§. 3, 9) und hat den Werth $R a_{01}$ (§. 7, 3), wenn (15)

$$R=\sqrt{u}=\begin{vmatrix}a_{00} & a_{01} & a_{02}\\ a_{01} & a_{11} & a_{12}\\ a_{02} & a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}.$$

Ausserdem ist $\frac{\partial v}{\partial \alpha_{01}}=1$ u. s. w., folglich hat das gesuchte Tetraëder den Bedingungen $a_{01}=a_{02}=a_{12}$, d. h.

$$r r_1 \cos r r_1 = r r_2 \cos r r_2 = r_1 r_2 \cos r_1 r_2$$

zu genügen. Setzt man diese gleichen Kantenproducte $=\sqrt{\vartheta}$, so erhält man

$$r_1^2 r_2^2=\vartheta+\alpha_{00},\ r_2^2 r^2=\vartheta+\alpha_{11},\ r^2 r_1^2=\vartheta+\alpha_{22},$$
$$r^4 r_1^4 r_2^4=(\vartheta+\alpha_{00})(\vartheta+\alpha_{11})(\vartheta+\alpha_{22})$$

zur Berechnung von r, r_1, r_2 aus den gegebenen Grössen und der noch zu bestimmenden Grösse ϑ. Es ist nämlich im vorliegenden Falle

$$\alpha_{01}+\alpha_{12}+\alpha_{20}=3\vartheta-(r^2+r_1^2+r_2^2)\sqrt{\vartheta}$$

und zwar unveränderlich $=-\frac{1}{2}(\alpha_{00}+\alpha_{11}+\alpha_{22}-4f_3^3)$, wofür zur Abkürzung $-c$ gesetzt werden soll. Daher hat man

$$(r^2+r_1^2+r_2^2)\sqrt{\vartheta}=3\vartheta+c,$$
$$(r^4+r_1^4+r_2^4+2r^2r_1^2+2r^2r_2^2+2r_1^2r_2^2)\,\vartheta=9\vartheta^2+6c\vartheta+c^2,$$
$$\left(\frac{(\vartheta+\alpha_{11})(\vartheta+\alpha_{22})}{\vartheta+\alpha_{00}}+\frac{(\vartheta+\alpha_{22})(\vartheta+\alpha_{00})}{\vartheta+\alpha_{11}}+\frac{(\vartheta+\alpha_{00})(\vartheta+\alpha_{11})}{\vartheta+\alpha_{22}}\right)\vartheta$$
$$=3\vartheta^2+2\vartheta(c-4f_3^2)+c^2,$$
$$\vartheta(\vartheta+\alpha_{11})^2(\vartheta+\alpha_{22})^2+\vartheta(\vartheta+\alpha_{22})^2(\vartheta+\alpha_{00})^2+\vartheta(\vartheta+\alpha_{00})^2(\vartheta+\alpha_{11})^2$$
$$=[3\vartheta^2+2\vartheta(c-4f_3^2)+c^2](\vartheta+\alpha_{00})(\vartheta+\alpha_{11})(\vartheta+\alpha_{22}),$$

eine Gleichung 4ten Grades zur Berechnung der Hülfsgrösse ϑ aus den gegebenen Grössen. Diese Gleichung hat immer eine reelle positive Wurzel, weil der Coeffi-

cient von ϑ^4 auf der linken Seite und das bekannte Glied auf der rechten Seite einerlei Zeichens sind.

Eine weitere Discussion dieser Gleichung sowie die Aufsuchung der geometrischen Eigenschaften von Tetraëdern, welche bei gegebener Grösse ihrer Flächen grösste Volume haben, bleibt zu wünschen übrig.

§. 18. Polygonometrische und polyedrometrische Relationen.

1. Sind $AB = a_1$, $BC = a_2$,.., $MN = a_{n-1}$, $NA = a_n$ die Seiten eines beliebig gegebenen Polygons und $\cos_{p,i}$ der Cosinus des Winkels, welchen die Gerade, von welcher die i^{te} Seite des Polygons eine Strecke ist, mit einer beliebig gegebenen Geraden bildet, so ist

$$a_1 \cos_{p,1} + a_2 \cos_{p,2} + \ldots + a_n \cos_{p,n} = 0 \text{ *)}.$$

Wenn nämlich A_1, B_1,.. die orthogonalen Projectionen von A, B,.. auf die gegebene Gerade bedeuten, so ist

$$A_1 B_1 + B_1 C_1 + \ldots + M_1 N_1 + N_1 A_1 = 0$$

unter der Voraussetzung, dass $A_1 B_1 = -B_1 A_1$ u. s. w. Nun ist

$$A_1 B_1 = AB \cos_{p,1},$$

wie auch die Richtung der positiven Strecken auf den Geraden, deren Strecken AB und $A_1 B_1$ sind, angenommen werde, weil bei Vertauschung einer Richtung mit der entgegengesetzten zwei der Grössen $A_1 B_1$, AB, $\cos_{p,1}$ das Zeichen wechseln. Durch Substitution der Werthe von $A_1 B_1$, $B_1 C_1$,.. findet man die angegebene Fundamentalgleichung der Polygonometrie.

Wenn umgekehrt a_1, a_2,.., a_n Strecken von gegebener Richtung und Grösse sind und $\cos_{p,i}$ den Cosinus des Winkels bedeutet, welchen die Gerade, auf welcher die i^{te} Strecke liegt, mit einer beliebigen Geraden bildet und die Summe $a_1 \cos_{p,1} + a_2 \cos_{p,2} + \ldots + a_n \cos_{p,n}$ verschwindet, wie auch die willkürliche Gerade angenommen werde, so erhält man ein geschlossenes Polygon, wenn man, ohne die Richtung der Strecken zu verändern, mit dem Ende der ersten den Anfang der zweiten, dann mit dem Ende der zweiten den Anfang der dritten u. s. f. vereint. Gesetzt, das Ende der letzten Strecke fiele mit dem Anfang der ersten nicht zusammen, so würde die Summe $a_1 \cos_{p,1} + a_2 \cos_{p,2} + \ldots + a_n \cos_{p,n}$ im Allgemeinen nicht verschwinden, was der Voraussetzung widerstreitet.

2. Wenn die Perimeter der Flächen eines beliebigen Polyeders so angenommen werden, dass alle Flächen von aussen betrachtet einerlei Sinnes sind, wenn ferner nach Festsetzung des Sinnes der positiven Winkel und Flächen in den einzelnen Ebenen die Flächen des Polyeders $= \alpha_1$, α_2,.., α_n sind, wenn endlich

*) Lexell Nov. Comm. Petrop. 19 p. 187. L'Huilier polygonométrie p. 20. Carnot géom. de pos. 254.

$\cos_{p,i}$ der Cosinus des Winkels ist, welchen die Ebene, auf der die Fläche α_i liegt, mit einer beliebig angenommenen Ebene bildet, so ist

$$\alpha_1 \cos_{p,1} + \alpha_2 \cos_{p,2} + \ldots + \alpha_n \cos_{p,n} = 0 \text{ *)}.$$

Beweis. Man betrachte das Polyeder nach Anleitung von Zusatz 2 zu §. 17, 14 als Aggregat von Tetraëdern. Ist $ABCD$ eines derselben und $A_1B_1C_1D_1$ seine orthogonale Projection auf die beliebig angenommene Ebene, so ist (§. 16, 5)

$$A_1B_1C_1 + C_1B_1D_1 + B_1A_1D_1 + A_1C_1D_1 = 0,$$

folglich

$$ABC \cos_{p,h} + CBD \cos_{p,i} + BAD \cos_{p,k} + ACD \cos_{p,l} = 0,$$

wenn die Suffixe h, i, k, l sich auf die Ebenen beziehen, deren Dreiecke projicirt wurden. Analoge Gleichungen ergeben sich aus den übrigen Tetraëdern, deren Aggregat das Polyeder ist. Durch Summirung aller dieser Gleichungen findet man

$$\alpha_1 \cos_{p,1} + \alpha_2 \cos_{p,2} + \ldots + \alpha_n \cos_{p,n} = 0,$$

weil jedes der Polyederfläche nicht angehörige Diagonaldreieck zu den Oberflächen von zwei Tetraëdern positiv zu der einen, negativ zu der andern gehört, folglich aus der Summe verschwindet. Wenn z. B. das Polyeder die Summe der Tetraëder $ABCD$ und $ADCE$ ist, so bilden

$$ABC,\ ACD,\ CBD,\ BAD$$

die Oberfläche von $ABCD$ und

$$ADC,\ ACE,\ CDE,\ DAE$$

die Oberfläche von $ADCE$, wobei die auf einer Diagonalebene liegenden Flächen ACD und ADC entgegengesetzt gleich sind.

Zusatz. Construirt man auf den Flächen des Polyeders auswärts gerichtete normale Strecken $a_1, a_2, \ldots, a_n$, proportional den Flächen, zu denen sie normal sind, so ist zufolge der bewiesenen Gleichung auch

$$a_1 \cos_{p,1} + a_2 \cos_{p,2} + \ldots + a_n \cos_{p,n} = 0,$$

worin nun unter $\cos_{p,i}$ der Cosinus des Winkels verstanden werden kann, den die Gerade, auf der die Strecke a_i liegt, mit der Normale einer beliebigen Ebene d. h. mit einer beliebigen Geraden bildet. Daher erhält man (1) ein geschlossenes Polygon, wenn man, ohne die Richtung der Strecken $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zu verändern, mit dem Ende der ersten Strecke den Anfang der zweiten, dann mit dem Ende der zweiten den Anfang der dritten u. s. f. vereint. Die Winkel der Seiten dieses Polygons gleichen den Winkeln der Flächen des Polyeders, jeder polygonometrischen Relation entspricht eine polyedrometrische.

3. Wenn die durch die Suffixe unterschiedenen Geraden (Ebenen) den Seiten (Flächen) eines beliebigen Polygons (Polyeders) parallel sind, so ist

---

*) L'Huilier théorèmes de polyedr. 1799 (Mém. présentés à l'Inst. 1. 1805 p. 264). Carnot l. c.

$$\begin{vmatrix} \cos_{1,1} & \cos_{1,2} & \cdot\cdot & \cos_{1,n} \\ \cos_{2,1} & \cos_{2,2} & \cdot\cdot & \cos_{2,n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cos_{n,1} & \cos_{n,2} & \cdot\cdot & \cos_{n,n} \end{vmatrix} = 0,$$

worin $\cos_{i,i} = 1$, $\cos_{i,k} = \cos_{k,i}$ ist.

Beweis. Aus der oben entwickelten Gleichung folgt das System von linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 \cos_{1,1} + a_2 \cos_{1,2} + \cdot\cdot + a_n \cos_{1,n} &= 0 \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad & \\ a_1 \cos_{n,1} + a_2 \cos_{n,2} + \cdot\cdot + a_n \cos_{n,n} &= 0. \end{aligned}$$

Die Resultante dieses linearen Systems (§. 9, 3) ist die zu beweisende Gleichung.

Da 3 Gerade x, y, r, welche einer Ebene parallel sind, auch den Seiten eines Dreiecks parallel sind, so hat man, wie bekannt,

$$\text{(I)} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos xr & \cos yr \\ \cos xr & 1 & \cos xy \\ \cos yr & \cos xy & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn 4 beliebige Gerade (Ebenen) x, y, z, r gegeben sind, so lässt sich ein Viereck (Tetraëder) construiren, dessen Seiten (Flächen) den gegebenen Geraden (Ebenen) parallel sind. Folglich ist

$$\text{(II)} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos xr & \cos yr & \cos zr \\ \cos xr & 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos yr & \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos zr & \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ^{*)}.$$

Diese Gleichung, welche man nach §. 5, 2 entwickeln kann, lehrt den Zusammenhang zwischen den Cosinus der von 4 Geraden (Ebenen) gebildeten Winkeln, zwischen den Seiten und Diagonalen eines sphärischen Vierecks, zwischen den Flächenwinkeln eines Tetraëders.

Wenn insbesondere x, y, z, r die Richtungen der Kanten AB, AC, AD und des Radius AE der dem Tetraëder $ABCD$ umgeschriebenen Kugel bedeuten, wenn $AB = b$, $AC = c$, $AD = d$, $AE = e$, so hat man

$$1 : \cos xr : \cos yr : \cos zr = 2e : b : c : d,$$

folglich (§. 3, 2)

$$\text{(III)} \quad \begin{vmatrix} 4e^2 & b & c & d \\ b & 1 & \cos xy & \cos xz \\ c & \cos xy & 1 & \cos yz \\ d & \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ^{**)}$$

zur Berechnung des Radius der einem Tetraëder umgeschriebenen Kugel aus den Kanten einer Ecke und den von diesen Kanten eingeschlossenen Winkeln.

Wenn hingegen E irgend einen fünften Punkt des Raumes bedeutet, so hat man nach den vorigen Bezeichnungen (§. 3, 2)

---

*) Carnot géom. de pos. 350. **) Legendre élém. de géom. Note V. Diese Gleichung ist nicht wesentlich verschieden von Lagrange's Gleichung (sur les pyr. 21).

$$\text{(IV)}\quad \begin{vmatrix} e^2 & be\cos xr & ce\cos yr & de\cos zr \\ be\cos xr & b^2 & bc\cos xy & bd\cos xz \\ ce\cos yr & bc\cos xy & c^2 & cd\cos yz \\ de\cos zr & bd\cos xz & cd\cos yz & d^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Drückt man das Streckenproduct $be \cos xr$ durch die Quadrate der Seiten des Dreieks ABE aus u. s. w., so erhält man die Gleichung zwischen den Quadraten der Strecken, welche 5 Punkte des Raumes verbinden. Diese Gleichung ist für das Quadrat einer Strecke vom zweiten Grade, in Uebereinstimmung mit der Construction, durch welche die Strecke aus den übrigen Strecken gefunden wird *).

4. Aus dem System der linearen Gleichungen (1)

$$\begin{aligned} a_1 \cos_{p,1} + a_2 \cos_{p,2} + \,..\, + a_n \cos_{p,n} &= 0 \\ a_1 \cos_{2,1} + a_2 \cos_{2,2} + \,..\, + a_n \cos_{2,n} &= 0 \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad & \\ a_1 \cos_{n,1} + a_2 \cos_{n,2} + \,..\, + a_n \cos_{n,n} &= 0 \end{aligned}$$

folgt die allgemeinere Gleichung

$$\begin{vmatrix} \cos_{p,1} & \cos_{p,2} & .. & \cos_{p,n} \\ \cos_{2,1} & \cos_{2,2} & .. & \cos_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cos_{n,1} & \cos_{n,2} & .. & \cos_{n,n} \end{vmatrix} = 0,$$

welche den Zusammenhang zwischen den von $n+1$ Geraden (Ebenen) gebildeten Winkeln ausdrückt, wenn n Gerade (Ebenen) den Seiten (Flächen) eines Polygons (Polyeders) von n Seiten (Flächen) parallel sind.

In der analytischen Theorie der Geraden werden hauptsächlich die besondern Fälle

$$\begin{vmatrix} \cos rs & \cos xs & \cos ys \\ \cos xr & 1 & \cos xy \\ \cos yr & \cos xy & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \cos rs & \cos xs & \cos ys & \cos zs \\ \cos xr & 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos yr & \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos zr & \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix} = 0 \;{}^{**})$$

zur Bestimmung des Winkels von zwei Geraden aus den Winkeln, welche dieselben mit den coordinirten Axen bilden, angewendet.

5. Aus dem in (3) benutzten System von linearen Gleichungen lassen sich die Verhältnisse der Seiten eines Polygons (oder der Flächen eines Polyeders) ableiten. Nach §. 9, 3 mit Rücksicht auf §. 7, 5 findet man

$$a_1 : a_2 : a_3 : \,..\, = \sqrt{\beta_{1,1}} : \sqrt{\beta_{2,2}} : \sqrt{\beta_{3,3}} : \,..,$$

wenn $\beta_{i,i}$ den Coefficienten von $\cos_{i,i}$ in der Determinante

$$\begin{vmatrix} \cos_{1,1} & \cos_{1,2} & .. & \cos_{1,n} \\ \cos_{2,1} & \cos_{2,2} & .. & \cos_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cos_{n,1} & \cos_{n,2} & .. & \cos_{n,n} \end{vmatrix}$$

bedeutet.

---

*) Carnot géom. de pos. 359. Mém. sur la relation qui existe etc. 58. Diese Gleichung ist von Lagrange's Gleichung (sur les pyr. 19) nur äusserlich verschieden.

**) Magnus anal. Geom. des Raumes §. 9 (7). Vergl. einen Aufsatz des Verf. in Crelle J. 46 p. 145.

Für $n=3$ reducirt sich $\beta_{1,1}$ auf $\sin^2_{2,3}$, $\beta_{2,2}$ auf $\sin^2_{1,3}$, $\beta_{3,3}$ auf $\sin^2_{1,2}$ in Uebereinstimmung mit dem bekannten Satz von den Verhältnissen der Seiten eines Dreiecks.

Wenn $n>3$ und das Polygon plan ist, so verschwinden $\beta_{1,1}, \beta_{2,2}, .., \beta_{n,n}$ (3), weil $n-1$ Gerade einer Ebene ein $(n-1)$Eck bilden. Die Verhältnisse der Seiten eines planen Polygons sind daher im Allgemeinen unbestimmte Functionen der von den Seiten gebildeten Winkel.

Wenn $n=4$ und das Polygon nicht plan ist, so ist (§. 16, 2)

$$\beta_{11}=\sin^2{}_{234}, \; \beta_{22}=\sin^2{}_{134}, \; \beta_{33}=\sin^2{}_{124}, \; \beta_{44}=\sin^2{}_{123}.$$

Dem absoluten Werthe nach ist also

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = \sin_{234} : \sin_{134} : \sin_{124} : \sin_{123},$$

wovon das tedraëdrometrische Correlat von den Verhältnissen der Flächen eines Tetraëders bekannt ist *).

Vermöge der gefundenen Proportion hat man (1)

$$\sqrt{\beta_{1,1}}\cos_{p,1}+\sqrt{\beta_{2,2}}\cos_{p,2}+\,..\,+\sqrt{\beta_{n,n}}\cos_{p,n}=0,$$

worin durch das Zeichen einer Wurzel die Zeichen der übrigen Wurzeln bestimmt sind. In dem einfachsten Falle hat man

$$\sin_{23}\cos_{p,1}+\sin_{31}\cos_{p,2}+\sin_{12}\cos_{p,3}=0,$$

eine bekannte Formel der Goniometrie.

6. Die Lage des Punkts P in Bezug auf das Tetraëder $OABC$ ist durch die Abstände AP, BP, CP zweideutig bestimmt. Die völlige Bestimmtheit tritt ein, wenn auch der Abstand OP bekannt ist, dessen Quadrat mit jenen Abständen durch eine Gleichung zweiten Grades verbunden ist (3). Bezeichnet man einerseits

$$AP^2,\ BP^2,\ CP^2 \text{ durch } g_1, g_2, g_3,$$
$$OA^2,\ OB^2,\ OC^2,\ OP^2 \text{ durch } a_{11}, a_{22}, a_{33}, h,$$
$$OA.OP.\cos AOP,\ OB.OP\cos BOP,\ OC.OP.\cos COP \text{ durch } h_1, h_2, h_3,$$

andrerseits die Coordinaten der Punkte A, B, C, P in Bezug auf drei durch O gelegte Axen durch x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x, y, z; so finden sich zwischen beiderlei Bestimmungen von P folgende Relationen **).

Zunächst hat man aus trigonometrischen Gründen die Gleichungen

$$\text{(I)}\quad 2h_1=a_{11}+h-g_1,\quad 2h_2=a_{22}+h-g_2,\quad 2h_3=a_{33}+h-g_3,$$

mit welchen zur Bestimmung von h die Gleichung (3, IV)

$$\text{(II)}\quad \begin{vmatrix} h & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=0$$

zu verbinden ist, worin $OA.OB\cos AOB$, $OA.OC\cos AOC$, $OB.OC\cos BOC$ durch a_{12}, a_{13}, a_{23} bezeichnet sind.

---

*) BRETSCHNEIDER Geom. 677. **) LAGRANGE sur les pyr. 18.

Ferner ergiebt sich durch orthogonale Projection (vergl. §. 16, 4)

$$\text{(III)} \quad \begin{aligned} h_1 &= x\,X_1 + y\,Y_1 + z\,Z_1 \\ h_2 &= x\,X_2 + y\,Y_2 + z\,Z_2 \\ h_3 &= x\,X_3 + y\,Y_3 + z\,Z_3, \end{aligned}$$

wenn man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} x_1 \quad + y_1 \cos xy + z_1 \cos xz &= X_1 \\ x_1 \cos xy + y_1 \quad + z_1 \cos yz &= Y_1 \\ x_1 \cos xz + y_1 \cos yz + z_1 \quad &= Z_1 \end{aligned}$$

u. s. w. setzt.

Umgekehrt hat man (§. 9, 1)

$$\text{(IV)} \quad \begin{aligned} Rx &= h_1\,(X_1) + h_2\,(X_2) + h_3\,(X_3) \\ Ry &= h_1\,(Y_1) + h_2\,(Y_2) + h_3\,(Y_3) \\ Rz &= h_1\,(Z_1) + h_2\,(Z_2) + h_3\,(Z_3), \end{aligned}$$

worin

$$R = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos zx & \cos yz & 1 \end{vmatrix} = 6\,OABC \sin xyz$$

und (X_1),.. den Coefficienten von X_1,.. in R bedeutet, der sich nach §. 6, 5 weiter entwickeln lässt.

Wenn insbesondere P das Centrum der dem Tetraëder $OABC$ umgeschriebenen Kugel ist, so hat man $g_1 = g_2 = g_3 = h$, folglich $h_1 = \frac{1}{2} a_{11}$, $h_2 = \frac{1}{2} a_{22}$, $h_3 = \frac{1}{2} a_{33}$ u. s. w.

7. Die Lage des Punkts P in Bezug auf das Tetraëder $OABC$ ist durch die Abstände desselben von drei Flächen des Tetraëders vollkommen bestimmt, wenn man die positiven Abstände normal einwärts, die negativen Abstände auswärts construirt (oder umgekehrt). Bezeichnet man einerseits die Flächen OBC, OCA, OAB, CBA durch f_1, f_2, f_3, f; die Abstände des Punkts P von den genannten Flächen durch p_1, p_2, p_3, p; andrerseits die Coordinaten der Punkte A, B, C, P in Bezug auf drei durch O gelegte Axen wie vorhin, so hat man zwischen diesen Bestimmungen von P folgende Relationen*).

In §. 16, 7 wurde gesetzt

$$OABC : OBCP : OCAP : OABP : CBAP = 1 : \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu,$$
$$6\,OABC = V \sin xyz;$$

daher ist

$$1 : \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu = V \sin xyz : 2 f_1 p_1 : 2 f_2 p_2 : 2 f_3 p_3 : 2 f p,$$
$$\mu_1 V = \frac{2 f_1 p_1}{\sin xyz} \text{ u. s. w.}$$

Durch diese Substitution erhält man

$$\text{(1)} \quad \begin{aligned} \frac{2 f_1 p_1}{\sin xyz} &= \xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z \\ \frac{2 f_2 p_2}{\sin xyz} &= \xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z \\ \frac{2 f_3 p_3}{\sin xyz} &= \xi_3 x + \eta_3 y + \zeta_3 z \end{aligned}$$

---

*) LAGRANGE l. c. 24.

und umgekehrt

$$\text{(II)}\quad \begin{aligned} \tfrac{1}{3}x\, V\sin xyz &= f_1p_1x_1 + f_2p_2x_2 + f_3p_3x_3 \\ \tfrac{1}{3}y\, V\sin xyz &= f_1p_1y_1 + f_2p_2y_2 + f_3p_3y_3 \\ \tfrac{1}{3}z\, V\sin xyz &= f_1p_1z_1 + f_2p_2z_2 + f_3p_3z_3 . \end{aligned}$$

Vermöge der Gleichung $\mu + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ hat man

$$\text{(III)}\qquad fp + f_1p_1 + f_2p_2 + f_3p_3 = \tfrac{1}{3}V\sin xyz .$$

Wenn insbesondere P das Centrum einer die Tetraëderflächen berührenden Kugel ist, so sind die absoluten Werthe von p, p_1, p_2, p_3 einander gleich, während ihre Zeichen davon abhängen, ob die einzelnen Flächen innen oder aussen berührt werden. Ist ϱ der Radius der eingeschriebenen Kugel im engern Sinne, so hat man

$$\begin{aligned} (f + f_1 + f_2 + f_3)\varrho &= \tfrac{1}{3}V\sin xyz \\ (f + f_1 + f_2 + f_3)x &= f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 \\ (f + f_1 + f_2 + f_3)y &= f_1y_1 + f_2y_2 + f_3y_3 \\ (f + f_1 + f_2 + f_3)z &= f_1z_1 + f_2z_2 + f_3z_3 . \end{aligned}$$

Ist ϱ' der Radius der Kugel, welche die Fläche f aussen, die übrigen Flächen innen berührt, so hat man $p = -\varrho'$, $p_1 = p_2 = p_3 = \varrho'$ u. s. w. Durch die möglichen Zeichenwechsel findet man 11 Radien, unter denen 6 paarweise gleich sind, und 11 Centren.

8. Die Relationen, welche zwischen den Coordinaten g_1, g_2, g_3 oder h_1, h_2, h_3 (6) des Punktes P und den Coordinaten μ_1, μ_2, μ_3 oder p_1, p_2, p_3 (7) desselben stattfinden*), ergeben sich durch Substitution der in §. 16, 7 für x, y, z gefundenen Werthe in die für h_1, h_2, h_3 erhaltenen Ausdrücke. In der Formel

$$h_1 = \mu_1(x_1X_1 + y_1Y_1 + z_1Z_1) + \mu_2(x_2X_1 + y_2Y_1 + z_2Z_1) + \mu_3(x_3X_1 + y_3Y_1 + z_3Z_1)$$

hat der Coefficient von μ_1 den Werth $OA^2 = a_{11}$, der Coefficient von μ_2 den Werth $OA.OB\cos AOB = a_{12}$ u. s. w. (vergl. den Beweis §. 16, 4). Man erhält demnach

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} h_1 &= \mu_1a_{11} + \mu_2a_{12} + \mu_3a_{13} \\ h_2 &= \mu_1a_{12} + \mu_2a_{22} + \mu_3a_{23} \\ h_3 &= \mu_1a_{13} + \mu_2a_{23} + \mu_3a_{33} . \end{aligned}$$

Anstatt die Determinante zu entwickeln, welche man $= 0$ setzen muss, um h zu bestimmen (6), kann man unmittelbar wie vorhin

$$h = xX + yY + zZ$$

setzen und erhält

$$\text{(II)}\qquad \begin{aligned} h &= \mu_1h_1 + \mu_2h_2 + \mu_3h_3 \\ &= \mu_1^2a_{11} + \mu_2^2a_{22} + \mu_3^2a_{33} + 2\mu_1\mu_2a_{12} + 2\mu_1\mu_3a_{13} + 2\mu_2\mu_3a_{23} . \end{aligned}$$

Umgekehrt hat man (§. 17, 7. §. 9, 1)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = V^2\sin^2 xyz ,$$

$$\text{(III)}\qquad \begin{aligned} \mu_1 V^2\sin^2 xyz &= h_1\alpha_{11} + h_2\alpha_{12} + h_3\alpha_{13} \\ \mu_2 V^2\sin^2 xyz &= h_1\alpha_{12} + h_2\alpha_{22} + h_3\alpha_{23} \\ \mu_3 V^2\sin^2 xyz &= h_1\alpha_{13} + h_2\alpha_{23} + h_3\alpha_{33} , \end{aligned}$$

*) Lagrange l. c. 26.

wenn $\alpha_{11}, \alpha_{12},$.. die Coefficienten von $a_{11}, a_{12},$.. in der für $V^2 \sin^2 xyz$ angegebenen Determinante sind.

Aus diesen Relationen ergeben sich die übrigen durch die Substitutionen

$$\mu_1 V \sin xyz = 2 f_1 p_1 \text{ u. s. f. (7)}$$
$$\alpha_{11} = 4 f_1^2,\ \alpha_{12} = 4 f_1 f_2 \cos_{12} \text{ u. s. f. (§. 17, 3. §. 17, 15)}$$

nämlich

$$\text{(IV)}\quad \begin{aligned} \tfrac{1}{4} h_1 V \sin xyz &= f_1 p_1 a_{11} + f_2 p_2 a_{12} + f_3 p_3 a_{13} \\ \tfrac{1}{4} h_2 V \sin xyz &= f_1 p_1 a_{12} + f_2 p_2 a_{22} + f_3 p_3 a_{23} \\ \tfrac{1}{4} h_3 V \sin xyz &= f_1 p_1 a_{13} + f_2 p_2 a_{23} + f_3 p_3 a_{33} \end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{4} h V^2 \sin^2 xyz = f_1^2 p_1^2 a_{11} + f_2^2 p_2^2 a_{22} + f_3^2 p_3^2 a_{33} + 2 f_1 f_2 p_1 p_2 a_{12} + 2 f_1 f_3 p_1 p_3 a_{13} + 2 f_2 f_3 p_2 p_3 a_{23},$$

und umgekehrt

$$\text{(V)}\quad \begin{aligned} \tfrac{1}{4} p_1 V \sin xyz &= h_1 f_1 + h_2 f_2 \cos_{12} + h_3 f_3 \cos_{13} \\ \tfrac{1}{4} p_2 V \sin xyz &= h_1 f_1 \cos_{12} + h_2 f_2 + h_3 f_3 \cos_{23} \\ \tfrac{1}{4} p_3 V \sin xyz &= h_1 f_1 \cos_{13} + h_2 f_2 \cos_{23} + h_3 f_3 . \end{aligned}$$

9. Die Beziehung zwischen 4 Punkten eines Kreises A, B, C, D kann durch die Eigenschaften der Winkel, Strecken, Flächen, welche durch die betrachteten Punkte bestimmt sind, angegeben werden. Nach dem bekannten in Euclides' Elementen enthaltenen Theorem ist die Winkeldifferenz $ACB - ADB = 0$ oder 180^0, mithin allgemein

$$\text{(I)}\quad 2(ACB - ADB) = 0 \text{ *)},$$

wenn die genannten Punkte auf einem Kreise liegen und die Winkel gleiche Zeichen haben, welche durch Drehungen von einerlei Sinn beschrieben werden. Der Winkel 0 ist gleichbedeutend mit 360^0.

Nach dem Theorem des Ptolemäus (Almagest I, 9) ist ferner

$$\text{(II)}\quad \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 0,$$

wenn die Producte aus den Quadraten der gegenüberliegenden Strecken, welche 4 Kreispunkte A, B, C, D verbinden, durch p, q, r bezeichnet werden. Man findet aus dieser Gleichung die rationale Gleichung zwischen den Quadraten der Strecken, welche durch die genannten Punkte bestimmt sind. Eine der letztern analoge Gleichung lässt sich für die Quadrate der Strecken aufstellen, welche 5 Punkte einer Kugel verbinden.

Endlich kennt man die Relationen zwischen 4 Punkten eines Kreises oder 5 Punkten einer Kugel und einem beliebigen andern Punkte, wovon die letztere in einem Theorem Feuerbach's (Untersuchung der dreieckigen Pyramide p. 15) enthalten ist, welches Cayley (Cambr. math. J. II p. 268) und Luchterhandt (Crelle J. 23 p. 375) reproducirt haben. Dieselben Relationen hat Möbius (Crelle J. 26 p. 26) aus barycentrischen Principien abgeleitet. Cayley's Verfahren, das auf dem Gebrauch der Determinanten beruht, ist folgendes.

Die Punkte A, B, C, D eines Kreises seien in Bezug auf ein System orthogonaler Axen, dessen Anfang O ist, durch die Coordinaten $x, y;\ x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ x_3, y_3$ gegeben. Man hat, wie bekannt,

*) Möbius Kreisverwandtschaft §. 14.

$$x^2+y^2 = a+bx+cy$$
$$x_1^2+y_1^2 = a+bx_1+cy_1$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_3^2+y_3^2 = a+bx_3+cy_3$$

folglich (§. 9, 3)

$$\text{(III)} \quad \begin{vmatrix} x^2+y^2 & 1 & x & y \\ x_1^2+y_1^2 & 1 & x_1 & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ x_3^2+y_3^2 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Entwickelung dieser Determinante nach §. 3, 6 mit Rücksicht auf §. 16, 5 giebt:

$$OA^2.BCD - OB^2.CDA + OC^2.DAB - OD^2.ABC = 0.$$

Wenn man OP normal zur Kreisebene construirt und die Identität (§. 16, 5)

$$OP^2\,(BCD - CDA + DAB - ABC) = 0$$

zu der vorigen Gleichung addirt, so kommt

$$\text{(IV)} \quad PA^2.BCD - PB^2.CDA + PC^2.DAB - PD^2.ABC = 0,$$

worin P irgend einen Punkt des Raumes bedeutet. Insbesondre ist, wenn P mit D zusammenfällt,

$$DA^2.BCD + DB^2.CAD + DC^2.ABD = 0.$$

In gleicher Weise seien die Punkte A, B, C, D, E einer Kugel in Bezug auf ein System orthogonaler Axen durch die Coordinaten x, y, z; u. s. w. gegeben. Aus den Gleichungen

$$x^2+y^2+z^2 = a+bx+cy+dz$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_4^2+y_4^2+z_4^2 = a+bx_4+cy_4+dz_4$$

folgt

$$\text{(V)} \quad \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & 1 & x & y & z \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Entwickelung dieser Determinante giebt (§. 16, 6)

$$\text{(VI)} \quad OA^2.BCDE + OB^2.CDEA + OC^2.DEAB + OD^2.EABC + OE^2.ABCD = 0,$$

worin O irgend einen Punkt des Raumes bezeichnet. Nach den in §. 16, 7 angenommenen Bezeichnungen hat man

$$\mu_1 OA^2 + \mu_2 OB^2 + \mu_3 OC^2 + \mu OD^2 = OE^2,$$

d. h. wenn μ, μ_1, μ_2, μ_3 die coordinirten Coefficienten von E in Bezug auf die Pyramide $DABC$ sind, so ist für alle Punkte O auf einer um das Centrum E beschriebenen Kugel $\mu\,OD^2 + \mu_1 OA^2 + \mu_2 OB^2 + \mu_3 OC^2$ constant (Feuerbach). Insbesondre ist

$$AB^2.CDEA + AC^2.DEAB + AD^2.EABC + AE^2.ABCD = 0,$$
$$\mu_1 DA^2 + \mu_2 DB^2 + \mu_3 DC^2 = DE^2.$$

Wenn man die Determinanten (III) und (V) bezüglich mit

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2+y^2 & -2x & -2y \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ 1 & x_3^2+y_3^2 & -2x_3 & -2y_3 \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} 1 & x^2+y^2+z^2 & -2x & -2y & -2z \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 1 & x_4^2+y_4^2+z_4^2 & -2x_4 & -2y_4 & -2z_4 \end{vmatrix}$$

multiplicirt, so findet man (§. 6, 3)

$$\begin{vmatrix} d_{00} & .. & d_{03} \\ . & & . \\ d_{30} & .. & d_{33} \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} d_{00} & .. & d_{04} \\ . & & . \\ d_{40} & .. & d_{44} \end{vmatrix},$$

wobei im ersten Falle

$$\begin{aligned} d_{00} &= x^2+y^2+x^2+y^2-2x^2-2y^2=0 \\ d_{01} &= x^2+y^2+x_1^2+y_1^2-2xx_1-2yy_1=AB^2 \\ d_{02} &= x^2+y^2+x_2^2+y_2^2-2xx_2-2yy_2=AC^2 \text{ u. s. w.,} \end{aligned}$$

im zweiten Falle

$$\begin{aligned} d_{00} &= x^2+y^2+z^2+x^2+y^2+z^2-2x^2-2y^2-2z^2=0 \\ d_{01} &= x^2+y^2+z^2+x_1^2+y_1^2+z_1^2-2xx_1-2yy_1-2zz_1=AB^2 \end{aligned}$$

u. s. w. Daher ist die oben erwähnte Gleichung zwischen den Strecken, welche 4 Punkte eines Kreises verbinden, folgende (Cayley):

$$\text{(VII)} \qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{01} & d_{02} & d_{03} \\ d_{01} & 0 & d_{12} & d_{13} \\ d_{02} & d_{12} & 0 & d_{23} \\ d_{03} & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

worin $d_{i,k}$ das Quadrat der Strecke vom i^{ten} bis zum k^{ten} Punkte bedeutet.

Die analoge Gleichung zwischen den Strecken, welche 5 Punkte einer Kugel verbinden, lautet (Cayley):

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{01} & d_{02} & d_{03} & d_{04} \\ d_{01} & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{02} & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{03} & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ d_{04} & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinanten können nach §. 5, 2 entwickelt werden.

10. Die gefundenen Relationen (III) bis (VIII) gelten für Punkte einer Ellipse oder Hyperbel, eines Ellipsoids oder Hyperboloids, wenn man das Quadrat jeder Strecke nach dem Quadrat des parallelen halben Diameters misst *).

Beweis. Wenn an die Stelle der Kugel eine der genannten Flächen zweiten Grades tritt und die coordinirten orthogonalen Axen den Hauptaxen der Fläche parallel sind, so geht die Gleichung

$$x^2+y^2+z^2=a+bx+cy+dz$$

in folgende über:

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\varepsilon\left(\frac{y}{\beta}\right)^2+\varepsilon_1\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2=1+b'x+c'y+d'z,$$

worin ε, ε_1 positive oder negative Einheiten bedeuten. Daher erscheint in der Gleichung (V)

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\varepsilon\left(\frac{y}{\beta}\right)^2+\varepsilon_1\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2$$

statt $x^2+y^2+z^2$. Ist nun MA_1 der halbe Diameter der Fläche, welcher mit OA einerlei Richtung hat, sind ferner p, q, r die Coordinaten von A_1 in Bezug auf die Hauptaxen der Fläche, so ergiebt sich aus elementaren Gründen

*) Die Geltung der obigen Sätze für Ellipse und Ellipsoid hat Brioschi Crelle J. 50 p. 236 bemerkt.

$$x : y : z : OA = p : q : r : MA_1 .$$

Weil aber, wie bekannt,

$$\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{q}{\beta}\right)^2 + \varepsilon_1\left(\frac{r}{\gamma}\right)^2 = 1$$

ist, so hat man

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \varepsilon_1\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 = \frac{OA^2}{MA_1^2} \text{ *)}.$$

Mithin kommen in (IV) und (VI)

$$\frac{OA^2}{MA_1^2}, \frac{OB^2}{MB_1^2}, \frac{OC^2}{MC_1^2}, \ldots$$

an die Stelle von OA^2, OB^2, OC^2,.., während die übrigen Grössen unverändert bleiben.

Wenn man ferner die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{x^2}{\alpha^2} + \varepsilon\frac{y^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\frac{z^2}{\gamma^2} & 1 & x & y & z \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \frac{x_4^2}{\alpha^2} + \varepsilon\frac{y_4^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\frac{z_4^2}{\gamma^2} & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{x^2}{\alpha^2} + \varepsilon\frac{y^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\frac{z^2}{\gamma^2} & -2\frac{x}{\alpha^2} & -2\varepsilon\frac{y}{\beta^2} & -2\varepsilon_1\frac{z}{\gamma^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 1 & \frac{x_4^2}{\alpha^2} + \varepsilon\frac{y_4^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\frac{z_4^2}{\gamma^2} & -2\frac{x_4}{\alpha^2} & -2\varepsilon\frac{y_4}{\beta^2} & -2\varepsilon_1\frac{z_4}{\gamma^2} \end{vmatrix}$$

multiplicirt, so erhält man

$$\begin{vmatrix} d_{00} & \cdot\cdot & d_{04} \\ \cdot & & \cdot\cdot \\ d_{40} & \cdot\cdot & d_{44} \end{vmatrix},$$

worin

$$d_{00} = \frac{x^2}{\alpha^2} + \varepsilon\frac{y^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\frac{z^2}{\gamma^2} + \frac{x^2}{\alpha^2} + \varepsilon\frac{y^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\frac{z^2}{\gamma^2} - 2\frac{x^2}{\alpha^2} - 2\varepsilon\frac{y^2}{\beta^2} - 2\varepsilon_1\frac{z^2}{\gamma^2}$$
$$= 0,$$

$$d_{01} = \frac{x^2}{\alpha^2} + \varepsilon\frac{y^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\frac{z^2}{\gamma^2} + \frac{x_1^2}{\alpha^2} + \varepsilon\frac{y_1^2}{\beta^2} + \varepsilon_1\frac{z_1^2}{\gamma^2} - 2\frac{xx_1}{\alpha^2} - 2\varepsilon\frac{yy_1}{\beta^2} - 2\varepsilon_1\frac{zz_1}{\gamma^2}$$
$$= \left(\frac{x-x_1}{\alpha}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{y-y_1}{\beta}\right)^2 + \varepsilon_1\left(\frac{z-z_1}{\gamma}\right)^2,$$

wofür man wie oben AB^2 dividirt durch das Quadrat des halben Diameters, der AB parallel ist, findet u. s. w.

11. Ein Kegelschnitt zweiten Grades ist durch einen seiner Brennpunkte O und 3 andere Punkte A, B, C bestimmt; daher müssen 4 Punkte eines Kegelschnitts und ein Brennpunkt desselben eine gewisse Relation haben. Die Rotationsfläche zweiten Grades, welche durch Rotation eines Kegelschnitts um seine Hauptaxe entsteht, ist durch einen ihrer Brennpunkte O und 4 andere Punkte A, B, C, D bestimmt, so dass eine Relation zwischen 5 Punkten einer solchen Fläche und einem ihrer Brennpunkte bestehen muss. Diese Relationen sind von Möbius (Crelle J. 26 p. 29) angegeben und bewiesen worden.

*) Diese Eigenschaft ist von Joachimsthal Crelle J. 40 p. 32 angezeigt worden.

Man kann dieselben aus dem bekannten Satze ableiten, dass der Radius Vector $OA = r$ eines Kegelschnitts oder einer Rotationsfläche der angegebenen Art eine lineare Function der Coordinaten x, y oder x, y, z des Punktes A in Bezug auf beliebige Axen ist. Sind x_1, y_1 oder x_1, y_1, z_1 die Coordinaten von B u. s. w., so hat man

$$\begin{aligned} r &= a + bx + cy \\ r_1 &= a + bx_1 + cy_1 \\ r_2 &= a + bx_2 + cy_2 \\ r_3 &= a + bx_3 + cy_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r &= a + bx + cy + dz \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ r_4 &= a + bx_4 + cy_4 + dz_4 \end{aligned}$$

folglich (§. 9, 3)

$$\begin{vmatrix} r & 1 & x & y \\ r_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ r_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ r_3 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} r & 1 & x & y & z \\ r_1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ r_4 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. (§. 16, 5. 6)

(I) $$OA.BCD - OB.CDA + OC.DAB - OD.ABC = 0,$$

(II) $$OA.BCDE + OB.CDEA + OC.DEAB + OD.EABC + OE.ABCD = 0.$$

Wenn A, B, C, D auf der Rotationsfläche und zugleich auf einer durch O gehenden Ebene liegen, so ist $ABCD = 0$ und

$$BCDE : -CDAE : DABE : -ABCE = BCD : -CDA : DAB : -ABC,$$

folglich

$$OA.BCD - OB.CDA + OC.DAB - OD.ABC = 0,$$

d. h. die Rotationsfläche wird von einer durch einen ihrer Brennpunkte gelegten Ebene in einer Linie zweiten Grades geschnitten, für welche jener Punkt ein Brennpunkt ist (Möbius l. c.).

12. Die Relation zwischen den Strecken, welche 5 Punkte des Raumes verbinden, ist zuerst von Lagrange in einer wenig entwickelten Form aufgestellt, dann von Carnot wiederholt behandelt worden, ohne dass ein übersichtliches Resultat erreicht worden wäre (vergl. 3). Die einfachste Relation zwischen 5 Punkten des Raumes, A, B, C, D, E, deren Coordinaten in Bezug auf 3 beliebige Axen x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 u. s. w. sind, findet man, indem man die Identität (§. 2, 4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 1 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = 0$$

nach §. 3, 6 entwickelt und die gefundenen Determinanten 4ten Grades nach §. 16, 6 deutet, nämlich:

(I) $$BCDE + CDEA + DEAB + EABC + ABCD = 0,$$

womit die in §. 16, 7 vorkommende bekannte Gleichung übereinstimmt. Wenn man die Volume der einzelnen Tetraëder durch ihre Kanten ausdrückt (§. 17, 14 Zusatz 1), so erhält man eine irrationale Gleichung, deren rechte Seite Null ist und deren linke Seite die Summe der Quadratwurzeln aus 5 Determinanten 5ten Grades ist. Um diese Gleichung zu rationalisiren, ist es nicht nöthig, das Product aus den verschiedenen Werthen zu bilden, welche die linke Seite vermöge der Zweideutigkeit der Quadratwurzeln annehmen kann. Es genügt vielmehr, die

Gleichung (I) mit einem ihrer Glieder zu multipliciren, weil das Product aus zwei Tetraëdern eine rationale Function von den Quadraten der Strecken ist, welche die Eckpunkte des einen Tetraëders mit denen des andern Tetraëders verbinden (§. 17, 14).

Die gesuchte Gleichung ist in einfacher Gestalt zuerst von Cayley (Cambr. math. J. 2 p. 268) direct entwickelt worden. Nach Analogie des in (9) mitgetheilten Verfahrens hat Cayley die allgemeinere Determinante

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1^2+y_1^2+z_1^2+u_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ \cdot & \cdot & & & & \\ 1 & x_5^2+y_5^2+z_5^2+u_5^2 & x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \end{vmatrix}$$

mit

$$-16R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2+u_1^2 & 1 & -2x_1 & -2y_1 & -2z_1 & -2u_1 \\ \cdot & \cdot & & & & \\ x_5^2+y_5^2+z_5^2+u_5^2 & 1 & -2x_5 & -2y_5 & -2z_5 & -2u_5 \end{vmatrix}$$

multiplicirt. Man findet (§. 6, 3)

$$-16R^2 = \begin{vmatrix} h_{00} & \cdot\cdot & h_{05} \\ \cdot & \cdot\cdot & \\ h_{50} & \cdot\cdot & h_{55} \end{vmatrix},$$

worin $h_{i,k} = h_{k,i}$ (§. 6, 2) und zwar

$$h_{00} = 0,\ h_{01} = 1,\ h_{02} = 1, \ldots,\ h_{05} = 1,$$
$$h_{11} = h_{22} = \ldots h_{55} = 0,$$
$$h_{12} = x_2^2+y_2^2+z_2^2+u_2^2+x_1^2+y_1^2+z_1^2+u_1^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2 - 2z_1z_2 - 2u_1u_2$$
$$= (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2+(u_1-u_2)^2$$

u. s. w. Wenn die unbestimmten Grössen $u_1, u_2, \ldots, u_5$ verschwinden, so verschwindet R (§. 3, 2). Versteht man zugleich unter x_1, y_1, z_1 die orthogonalen Coordinaten des Punktes A u. s. w., so wird $h_{12} = AB^2$ u. s. w. Bezeichnet man die Quadrate der Strecken vom ersten zum zweiten, dritten,.. Punkte wie oben durch $d_{12}, d_{13}, \ldots$, so hat man die gesuchte Gleichung

$$\text{(II)} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} & d_{35} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 & d_{45} \\ 1 & d_{15} & d_{25} & d_{35} & d_{45} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Man kann diese Determinante nach §. 5, 2 oder einfach nach §. 3, 1 entwickeln. In dem letztern Falle erhält man

$$\delta_{01} + \delta_{02} + \delta_{03} + \delta_{04} + \delta_{05} = 0,$$

wenn man die Coefficienten, welche die Elemente der ersten Horizontalreihe in der Determinante haben, durch $\delta_{01}, \delta_{02}, \ldots$ bezeichnet. Bei analoger Bezeichnung hat man aber (§. 7, 5)

$$\delta_{01} : \delta_{02} : \delta_{03} : \delta_{04} : \delta_{05} = \sqrt{\delta_{11}} : \sqrt{\delta_{22}} : \sqrt{\delta_{33}} : \sqrt{\delta_{44}} : \sqrt{\delta_{55}},$$

weil die Determinante verschwindet und weil $d_{i,k} = d_{k,i}$, folglich $\delta_{i,k} = \delta_{k,i}$ (§. 3, 9) ist. Folglich ist

$$\sqrt{\delta_{11}}+\sqrt{\delta_{22}}+\sqrt{\delta_{33}}+\sqrt{\delta_{44}}+\sqrt{\delta_{55}}=0,$$

womit nach §. 17, 14 die Gleichung (I) übereinstimmt.

Zusatz. Auf demselben Wege werden die Gleichungen zwischen den Quadraten der Strecken gefunden, welche 4 Punkte A, B, C, D einer Ebene und 3 Punkte A, B, C einer Geraden verbinden (§. 17, 13. 14). Es ist nämlich nach den angenommenen Bezeichnungen im ersten Falle

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder $\sqrt{\delta_{11}}+\sqrt{\delta_{22}}+\sqrt{\delta_{33}}+\sqrt{\delta_{44}}=0$, übereinstimmend mit

$$BCD-CDA+DAB-ABC=0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = 0;$$

im zweiten Falle

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder $\sqrt{\delta_{11}}+\sqrt{\delta_{22}}+\sqrt{\delta_{33}}=0$, übereinstimmend mit

$$AB+BC+CA=0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichungen ergeben sich auch aus 9, VII und VIII. Wenn nämlich von 5 Punkten auf einer Kugel einer unendlich fern ist, so ist z. B.

$$1=\frac{d_{01}}{d_{01}}=\frac{d_{02}}{d_{01}}=\frac{d_{03}}{d_{01}}=\frac{d_{04}}{d_{01}},$$

und die 4 andern Punkte liegen auf einer Ebene. Und wenn von 4 Punkten auf einem Kreise einer unendlich fern ist, so liegen die 3 andern Punkte auf einer Geraden.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.



